UNTERSUCHUNG ÜBER DIE MÖGLICHKEITEN DER EINFÜHRUNG EINES TEILCURRICULUMS MIT INHALTEN DER STOCHASTIK IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER 5. UND 6. JAHRGANGSSTUFE

Isolde Kinski

1981

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546818_0026

Untersuchung über die Möglichkeiten der Einführung eines Teilcurriculums mit Inhalten der Stochastik im Mathematikunterricht der 5. und 6. Jahrgangsstufe

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie
an der
Ludwig - Maximilians - Universität München
Fakultät für Psychologie und Pädagogik
vorgelegt von
Isolde Kinski
München
April 1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr. Hans Schiefele

Korreferent: Prof. Dr. Karl Seebach

Tag der mündlichen Prüfung: 27.7.1981

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1. Mathematisch-erkenntnistheoretischer Aspekt
1.1. Zur Geschichte der Stochastik 3
1.2. Zum Begriff der Wahrscheinlichkeit 9
1.2.1. Zur Ontologie der Wahrscheinlichkeit 11
1.2.2. Der subjektive Standpunkt 13
1.2.3. Der objektive a priori Standpunkt 13
1.2.4. Der objektive a posteriori Standpunkt 14
1.2.5 Von der intuitiven Wahrscheinlichkeit zur mathematischen Wahrscheinlichkeit 15
1.3. Fundamentale Ideen der Stochastik 18
1.4. Fundamentale Fehler beim intuitiven Umgang mit Wahrscheinlichkeit 22
1.5. Argumente für Stochastikunterricht aus der Sicht der Fachwissenschaft 28

2. Entwicklungs- und lernpsychologischer Aspekt
2.1. Die kognitive Entwicklung nach Jean Piaget 30
2.2. Piagets Untersuchungen zur Entwicklung stochastischer Begriffe 34
2.2.1. Irreversible Vermischung 35
2.2.2. Zentrierte Verteilungen 36
2.2.3. Gleichverteilung 37
2.2.4. Zufällige und nicht zufällige Ereignisse 37
2.2.5. Urnenexperimente 39
Le tirage au sort des couples
2.2.6. Chancenvergleich 40
2.2.7. Kombinatorik 42
2.3. Neuere Untersuchungen 42

3. Pädagogischer Aspekt
3.1. Zur Begründungsproblematik 44
3.2. Begründung der Auswahl des neuen Inhalts 46

3.2.1.	Stochastik und ihre Bedeutung im Gefüge der Wissenschaft	47
3.2.2.	Das Erziehungsziel Selbständigkeit und Stochastik	47
3.2.3.	Die Funktion des Inhalts Stochastik in den spezifischen Verwendungssituationen des privaten und öffentlichen Lebens	49
3.2.3.1.	Lebensbereich Schule	49
3.2.3.2.	Die Lebensbereiche Beruf, Familie und Freizeit	52
3.2.4.	Die Leistung des Inhalts Stochastik für Weltverstehen	54

4. Die Konstruktion des Teilcurriculums
- Stochastik in der 5. und 6. Jahrgangsstufe -

4.1.	Stochastik im Unterricht	56
4.1.1.	Geschichtlicher Rückblick	56
4.1.2.	Stochastik-Lehrgänge für 10-12jährige Schüler	61
4.1.2.1.	Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie von A. Engel	63
4.1.2.2.	Der Lehrplan von Varga für die 1. bis 6. Klasse	65
4.1.2.3.	Der Unterrichtsversuch von Fischbein/Pampu/Minzat	65
4.1.2.4.	Lehrgänge in Schulbüchern	66
4.1.2.5.	Das Curriculum-Projekt "Stochastik in der Hauptschule" unter der Leitung von Schupp/Jäger	70
4.1.3.	Stochastik in den gültigen Lehrplänen der Bundesländer für die 5. und 6. Jahrgangsstufe	72
4.2.	Zu den Lernzielen, Lerninhalten und Unterrichtsverfahren des Teilcurriculums	77
4.2.1.	Vorüberlegungen zur Integrierbarkeit in das bestehende bayerische Curriculum	77

4.2.2.	Zum gewählten Einstieg	80
4.2.3.	Übergeordnete Lernziele für den Stochastik-unterricht	81
4.2.4.	Das verwendete Lernzielstufenmodell des Staats-instituts für Schulpädagogik München	82
4.2.5.	Vorüberlegungen zu den Unterrichtsverfahren	84
4.2.5.1.	Lerntheorien und ihre Anwendbarkeit im schulischen Bereich	84
4.2.5.2.	Zum Lernprozeß	89
4.2.5.3.	Lerntransfer	94
4.2.5.4.	Motivation im Unterricht	97
4.2.5.5.	Lehrtheorien	102
4.2.5.6.	Folgerungen für die Unterrichtsverfahren des Teilcurriculums	107
4.3.	Das Teilcurriculum -Stochastik in der 5. und 6. Jahrgangsstufe -	114
4.3.1.	5. Jahrgangsstufe	114
4.3.1.1.	Das Teilcurriculum	114
4.3.1.2.	Handreichungen für den Lehrer	118
4.3.1.3.	Schülerskriptum	123
4.3.2.	6. Jahrgangsstufe	141
4.3.2.1.	Das Teilcurriculum	141
4.3.2.2.	Handreichungen für den Lehrer	147
4.3.2.3.	Das Schülerskriptum	155
4.4.	Strukturanalyse der Unterrichtsstunde "Zwei besondere Würfel"	187
4.4.1.	Vorüberlegungen	187
4.4.2.	Unterrichtsentwurf	190

5. Planung der Erprobung des Teilcurriculums		
5.1.	Zu den beiden Schularten Gymnasium und Hauptschule	202
5.2.	Empirische Forschungsmethoden	203
5.2.1.	Vor- und Nachtest	203
5.2.1.1.	5. Klasse	204
5.2.1.2.	6. Klasse	211

5.2.2.	Schülerbeobachtung Fragebogen Dokumentation des Unterrichts	216

6. Evaluation der Erprobung des Teilcurriculums

6.1.	5. Klasse Gymnasium (5/G)	221
6.1.1.	Vor- und Nachtest	221
6.1.2.	Beobachtung	223
6.1.3.	Fragebogen	224
6.2.	5. Klasse Hauptschule (5/HS)	225
6.2.1.	Vor- und Nachtest	226
6.2.2.	Beobachtung	227
6.2.3.	Fragebogen	229
6.3.	5. Klasse Gymnasium (5/G,2)	229
6.3.1.	Nachtest	230
6.4.	Vergleich der drei fünften Klassen	230
6.4.1.	Nachtest	230
6.4.2.	Beobachtung und Fragebogen	232
6.5.	6. Klasse Gymnasium (6/G)	233
6.5.1.	Vor- und Nachtest	233
6.5.2.	Beobachtung	236
6.5.3.	Fragebogen	237
6.6.	6. Klasse Hauptschule (6/HS)	238
6.6.1.	Vor- und Nachtest	238
6.6.2.	Beobachtung	240
6.6.3.	Fragebogen	241
6.7.	6. Klasse Gymnasium (6/G,2)	242
6.7.1.	Nachtest	242
6.8.	Vergleich der drei sechsten Klassen	243
6.8.1.	Nachtest	243
6.8.2.	Beobachtung und Fragebogen	245

7. Empfehlungen

7.1.	5. Jahrgangsstufe	246
7.2.	6. Jahrgangsstufe	247

Schlußgedanken 248

Literaturverzeichnis 249

Anhang

Tabellen der Evaluation

1. Zusammenfassende Darstellungen des Tests
   1. Test Zahlentabelle 5/G, 5/HS 6/G, 6/HS 1
   2. Test Zahlentabelle 5/G,2 6/G,2 2
   3. Histogramm der Vor- und Nachtests 3
   4. Item-Übersicht 5. Jahrgangsstufe 1a - 5b 4
   5. Item-Übersicht 5. Jahrgangsstufe 6a - 9b 5
   6. Item-Übersicht 6. Jahrgangsstufe 1a - 6b 6
   7. Item-Übersicht 6. Jahrgangsstufe 6c - 9b 7
   8. Histogramm 5. Jahrgangsstufe 5/G; 5/HS; 5/G,2 8
   9. Histogramm 6. Jahrgangsstufe 6/G; 6/HS; 6/G,2 9
   10. Item 10 Histogramm aller Klassen 10
2. Zusammenfassende Darstellungen des Fragebogens
   11. Fragebogen Zahlentabelle 5/G, 5/HS 6/G, 6/HS 11
   12. Fragebogen Histogramm 12
3. Tabellen der 5. Klasse Gymnasium (5/G)
   13. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 13
   14. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 14
   15. Vor- und Nachtest Histogramm 15
   16. Beobachtung (+) 16
   17. Beobachtung (+) 17
   18. Beobachtung (-) 18
   19. Beobachtung (-) 19
   20. Fragebogen 20
   21. Fragebogen 21
4. Tabellen der 5. Klasse Hauptschule (5/HS)
   22. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 22
   23. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 23

24. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 24
25. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 25
26. Vor- und Nachtest Histogramm 26
27. Beobachtung (+) 27
28. Beobachtung (+) 28
29. Beobachtung (-) 29
30. Beobachtung (-) 30
31. Fragebogen 31
32. Fragebogen 32
33. Fragebogen 33

5. Tabellen der 5. Klasse Gymnasium (5/G,2)
34. Nachtest Zahlentabelle 34
35. Nachtest Zahlentabelle 35
36. Nachtest Histogramm 36

6. Tabellen der 6. Klasse Gymnasium (6/G)
37. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 37
38. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 38
39. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 39
40. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 40
41. Vortest Histogramm 41
42. Nachtest Histogramm 42
43. Beobachtung (+) 43
44. Beobachtung (+) 44
45. Beobachtung (-) 45
46. Beobachtung (-) 46
47. Fragebogen 47
48. Fragebogen 48
49. Fragebogen 49

7. Tabellen der 6. Klasse Hauptschule (6/HS)
50. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 50
51. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 51
52. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 52
53. Vor- und Nachtest Zahlentabelle 53
54. Vor- und Nachtest Histogramm 54
55. Beobachtung (+) 55
56. Beobachtung (+) 56

57. Beobachtung (-) 57
58. Beobachtung (-) 58
59. Fragebogen 59
60. Fragebogen 60
61. Fragebogen 61

8. Tabellen der 6. Klasse Gymnasium (6/G,2)
62. Nachtest Zahlentabelle 62
63 Nachtest Zahlentabelle 63
64 Nachtest Histogramm 64

Einleitung

In immer stärkerem Maße wird von vielen Seiten gefordert, daß elementare Kenntnisse in Stochastik, das heißt in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, zu den heute erforderlichen Kulturtechniken gezählt werden und entsprechend im Unterricht vertreten sein müssen.
In der Oberstufe der Gymnasien hat sich der Stochastik-Unterricht im Laufe der letzten Jahre etabliert.
Eine elementare Kulturtechnik darf aber, so wird weiter argumentiert, nicht nur wenigen Schülern zugänglich gemacht werden und auch nicht so spät, sondern sie muß zum frühest möglichen Zeitpunkt und in allen Schularten vermittelt werden.
Der Ruf nach frühem und allgemeinem Stochastik-Unterricht wird immer unüberhörbarer.

Diese Arbeit hat sich nun zum Ziel gesetzt, eine Analyse der Forderungen nach frühzeitigem Stochastik-Unterricht vorzunehmen, eigene Begründungen zu formulieren und daraufhin ein Curriculum zu konzipieren und es einer ersten Erprobung zu unterziehen.

Folgende Fragen sollen in dieser Untersuchung beantwortet werden:

- Kann der Gegenstand Stochastik elementarisiert werden?
- Ab welchem Entwicklungsstand können stochastische Inhalte aufgenommen und verarbeitet werden?
- Welchen Bildungswert, welchen Nutzen hat Stochastik-Unterricht?
- Welche Erfahrungen wurden bisher mit Stochastik-Unterricht gemacht?
- Welche Lernziele und Lerninhalte, welche Unterrichtsverfahren kommen in Frage?

- Kann ein Stochastik-Curriculum in das bestehende Mathematikcurriculum integriert werden?
- Wie muß die Erprobung des konzipierten Curriculums geplant werden?
- Welche Empfehlungen für weitere Untersuchungen ergeben sich aus der Evaluation der Erprobung?

Die letzte Frage deutet schon darauf hin, daß sich die Erprobung des konzipierten Curriculums als eine Voruntersuchung versteht.
Die Analyse der in der Erprobung gewonnenen Daten und ihre Bewertung soll schließlich als erste formative Evaluation aufgefaßt werden.

An dieser Stelle möchte ich mich für die freundliche und uneingeschränkte Hilfe während der Erprobung der Curricula bei Frau Herchenbach, Herrn Höngsobler, Frau Krause, Herrn Paul und Frau Schmid herzlich bedanken; ebenso bei Herrn Dr. Bergold, Herrn OStD. Kratz, Herrn Rektor Stadelbauer, Herrn OStD. Weisenberger und Herrn Schulamtsdirektor Zitzelsberger, die die Erprobung ermöglicht haben.

Die Dokumentation (vgl. S. 218) des von mir abgehaltenen Unterrichts kann im Mathematischen Institut der Universität München eingesehen werden. Ebenso die Videokassetten der Unterrichtsstunde "Zwei besondere Würfel" (vgl. S. 187f) und die von den Schülern bearbeiteten Testbogen.

1. Mathematisch-erkenntnistheoretischer Aspekt

Das aus dem Griechischen abgeleitete Substantiv Stochastik, Vermutung, umfaßt die mathematischen Gebiete Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

In Platons Philebos gibt es folgende Passage über das Vermuten, das Mutmaßen: Sokrates spricht: "Zum Beispiel, wenn jemand aus allen Künsten die Rechenkunst und die Meßkunst und die Waagekunst ausscheidet, so ist es, geradeheraus zu sagen, nur etwas Geringfügiges, was von einer jeden dann noch übrig bleibt.... Es bleibt wenigstens nach diesem nichts übrig als Abschätzen nach Gutdünken und Einübung der Sinne durch Erfahrung und Gewöhnung, indem man dazu nimmt, was nur die glückliche Mutmaßung vermag, welche viele auch eine Kunst nennen, die durch Anstrengung und Sorgfalt ihre Stärke erreicht." (Philebos 55e)

Was damals als "nur etwas Geringfügiges" eingestuft wurde, hat sich inzwischen zu einer wissenschaftlichen Methode entwickelt.
Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist eine rein mathematische Theorie. Die Erfahrung hat nun gezeigt, daß man diese Theorie in sehr unterschiedlichen außermathematischen Bereichen mit großem Nutzen anwenden kann. Man setzt die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie in Beziehung zu Begriffen des betreffenden außermathematischen Bereichs; ein Wahrscheinlichkeitsmodell wird'angepaßt'. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt dann ein Maß für den Gewißheitsgrad einer Vermutung. Die Statistik sucht nun Methoden, wie diese Interpretation des betreffenden Anwendungsbereichs vorgenommen werden soll. "Die Statistik setzt die Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer ganz wesentlichen Weise voraus." (Oberschelp, 1966, S. 328)

1.1. Zur Geschichte der Stochastik

Bereits Hieronimus Cardano (1501-1576) beschreibt in seinem Buch "Liber de ludo aleae" die Lösung einfacher Probleme des Würfelspiels.
Der eigentliche Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird aber auf das Jahr 1654 datiert. Zu diesem Zeitpunkt wurde

nämlich Blaise Pascal von dem Chevalier de Méré, einem prominenten Midglied eines Pariser Spielclubs, um Rat gebeten. Man wußte damals aus Erfahrung, daß es beim Spiel mit einem Würfel vorteilhaft ist darauf zu setzen, bei vier Würfen mindestens eine Sechs zu werfen. De Méré schloß aus dieser Erfahrung, daß er beim Spiel mit zwei Wurfeln bei 24 Würfen auf das Erscheinen mindestens einer Doppelsechs wetten könne. Entgegen seinen Erwartungen verlor er aber auf die Dauer bei diesem Spiel.

Pascal führte über dieses Proolem einen Briefwechsel mit Fermat und klärte dabei den Sachverhalt auf. Nach heutigem Verständnis kann man das Problem z.B. so lösen: Die Wahrscheinlichkeit, in vier Würfen mindestens eine Sechs zu werfen ist $1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0{,}518$, aber die Wahrscheinlichkeit in 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens einmal eine Doppelsechs zu werfen ist $1 - (\frac{35}{36})^{24} \approx 0{,}491$. Der Chevalier hätte also besser daran getan, auf dieses Ereignis nicht zu wetten.

Ein weiteres Problem, das "Proolème des points", wird auch in diesem Briefwechsel gelöst. Hier geht es darum, wie nach der vorzeitigen Unterorechung eines Glücksspiels der Einsatz fair verteilt werden muß, wenn die Spieler zu Beginn vereinbart hatten, daß derjenige, der als erster eine festgesetzte Zahl von Spielen gewonnen hat, den ganzen Einsatz gewinnt und zum Zeitpunkt der Unterbrechung keiner der beiden Spieler die nötige Anzahl von Spielen gewonnen hat.

Christian Huygens, angeregt durch die Korrespondenz zwischen Pascal und Fermat, schrieb das erste Lehrbuch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es erschien 1657 unter dem Titel "De ratociniis in ludo aleae" und enthielt eine Zusammenstellung aller bis dahin gelösten Aufgaben und fünf weitere neue Proolems.

Huygens versucht bereits, basierend auf dem Begriff der Erwartung, eine Theorie der Wahrscheinlichkeit zu formulieren: "Auf jeden Fall halte ich dafür, daß der Leser bei einem aufmerksamen Studium des Gegenstandes bemerkt, daß es hier nicht nur um Spiele geht, sondern daß hier die Grundlagen einer sehr interessanten und ergiebigen Theorie entwickelt werden." (zit. nach Hengst, 1971, S. 82) Für ein halbes Jahrhundert blieo dieses Büchlein das Lehrbuch für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Es wurde erst 1713 durch Jakob Bernoulli's "De arte conjectandi" (posthum erschienen) abgelöst. Hier findet sich schon die Summenregel, die Produktregel, ebenso der Gedanke der Verteilung und das Gesetz der großen Zahlen. Bernoulli stellte eine erste Verbindung zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik her und suchte nach neuen Anwendungsgebieten für die Wahrscheinlichkeitsrechnung, unabhängig von Glücksspiel-Problemen.

Nicht lange vorher, 1693, hatte Edmund Halley, der Entdecker des nach ihm benannten periodischen Kometen, erstmals eine Sterbetafel als Grundlage für eine Lebensversicherung zusammengestellt. Er gehörte zur Schule von John Graunt, der 1662 seine Schrift "Natural and political observations upon the bills of mortality" veröffentlicht hatte. Diese 'politischen Arithmetiker' untersuchten anhand von Sterberegistern - Halley z.B. gewann seine Daten aus den Geburts- und Sterberegistern der Stadt Breslau - die Bevölkerungsentwicklung und versuchten erstmals, die Bevölkerungszahlen abzuschätzen.
Volkszählungen hatte es schon bei den Chinesen, den Ägyptern und den Juden (2.Sam.24, 1-10) gegeben. Die bekannteste ist die unter Kaiser Augustus zum Zeitpunkt der Geburt Christi durchgeführte. Diese Zählungen dienten meistens der Erstellung von Steuerlisten. In Deutschland haben zuerst einige Städte, wie Nürnberg im Jahre 1449, solche Zählungen durchgeführt. Aber erst im 19. Jahrhundert wurde bei Zählungen gesammeltes Material auch systematisch und zielgerichtet verarbeitet.
Die belgische Volkszählung im Jahre 1846 unter der Leitung von A.Quetelet beeinflußte die weitere Entwicklung maßgeblich. Quetelet versuchte des weiteren in seiner Schrift "Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou Essai de physique sociale" (1835) ein Lehrgebäude der Statistik aufzubauen. Mit seinem Begriff des "homme moyen" allerdings und den Schlüssen, die er aus dieser Konstruktion zog, erregte er großes Ärgernis und fügte dem Ansehen der Statistik in der öffentlichen Meinung schweren Schaden zu. "Freilich bestand und besteht die Aufgabe der Statistik darin, von den Individualitäten der Einzelerscheinungen abzusehen und mittlere Größen zu berechnen. Aber Quetelet hat die zahlreichen (übernommenen oder selbst erfundenen) Durchschnitte menschlicher Eigenschaften zu einem Durchschnittsmenschen zusammen-

setzen wollen und jede Abweichung von diesem Homunkulus 'mittlerer Mensch' als Perturbation, als störende Zufälligkeit, deklariert." (Menges, 1968, S.8)

Für die Wahrscheinlichkeitstheorie ist nach den elementaren Ansätzen von Huygens und J.Bernoulli besonders A.de Moivre (1667 - 1754) zu nennen. De Moivre war Franzose, lebte aber meistens in England und verkaufte dort Gewinnsysteme für das Roulettespiel. Er veröffentlichte u.a. die Schrift "The Doctrine of Chances" und entdeckte die lange Zeit nach Gauß benannte Verteilung, die 'Normalverteilung' und die Moivre-Laplace'schen Grenzwertsätze.

P.S.Laplace (1749 - 1827) wird allgemein als der Begründer der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie angesehen. Vor ihm hatten u.a. Nikolais und Daniel Bernoulli sich mit Wahrscheinlichkeitsrechnung befaßt. Ebenso Euler und Bayes. Bayes fragte als erster nach der Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit einer Hypothese.
Laplace veröffentlichte im Jahre 1812 sein berühmtes Buch "Théorie analytique de la probabilité", in dem er sowohl die bisherigen Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammenfaßte als auch seine eigenen Erkentnisse formulierte.
Er stellte eine Definition des Begriffs 'Wahrscheinlichkeit' auf der Basis der 'Gleichwahrscheinlichkeit' auf, bewirkte eine Vertiefung mit Hilfe der Analysis und wandte seine Erkenntnisse auf Probleme der Bevölkerungsstatistik und auch der Astronomie an.

Nach Laplace beschäftigten sich Mathematiker wie Gauß, Poisson, Tschebyscheff oder Markoff mit Wahrscheinlichkeitsrechnung und bauten die Theorie mit verschiedenen Schwerpunkten weiter aus. Gauß z.B. veröffentlichte 1823 eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der von ihm konzipierten Methode der kleinsten Quadrate. Poisson verallgemeinerte 1837 das Gesetz der großen Zahlen von J.Bernoulli und Sätze von Laplace und entdeckte die nach ihm benannte Verteilung. Tschebyscheff begründete die russische Tradition in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er fand z.B. Ungleichungen, mit deren Hilfe Abweichungen bei einer großen Anzahl von Versuchen sehr weitgehend abgeschätzt werden können.

Die Anwendungsmöglichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden im 19. Jahrhundert erheblich ausgeweitet.
1860 gelang z.B. J.C.Maxwell die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle in einem idealen Gas.
In der Biologie und hier speziell in der Vererbungslehre stellten sich Forscher wie F.Galton, K.Pearson und vor allem R.A.Fisher die Frage, wie man bei der Untersuchung statistischer Zusammenhänge am sinnvollsten vorgeht und wieweit Stichproben aussagekräftig sind und Hypothesen überprüft werden können. Fisher entwickelte schließlich in den zwanziger und dreißiger Jahren unseres Jahrhunderts eine"außerordentlich weitgespannte statistische Methodik" (Menges, 1968, S.13)

In den Grundlagen der mathematischen Theorie hatte man vorerst keine Forschritte erreicht. J.v.Kries schlug 1886 in seinen "Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine logische Untersuchung" vor, das Laplace'sche Prinzip des unzureichenden Grundes in das des zwingenden Grundes umzuwandeln. Eine Axiomatisierung war aber bisher nicht gegluckt. Hilbert nannte im Jahre 1900 in seinem berühmten Pariser Vortrag das offene Problem der Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als sechstes von insgesamt dreiundzwanzig ungelösten Problemen der Mathematik.
Deshalb wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht als eine voll zur Mathematik gehörende Theorie betrachtet. In oben erwähntem Vortrag fomulierte Hilbert diese Tatsache so: " urch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird nun die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbild diejenigen physikalischen Disziplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine herausragende Rolle spielt: dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik" (zit. nach Hengst, 1971, S.60)

Im Jahre 1919 veröffentlichte R.v.Mises seine Abhandlung "Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung", in der er die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert einer Folge relativer Häufigkeiten eines Ereignisses definiert und versucht, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu axiomatisieren. Seinem System fehlte die Konsistenz und vom axiomatischen Standpunkt aus hat seine Theorie nur noch historische Bedeutung. (vgl. Renyi, 1969, S.83)

Allerdings entfachte sein Versuch eine rege Diskussion sowohl uber die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, als auch über den Wahrscheinlichkeitsbegriff selbst und die Problematik der Anwendungen in der Realität und trug so zur Klärung der Situation bei.

Im Jahre 1933 gelang es schließlich dem Russen A.N.Kolmogoroff, die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Geiste der modernen Mathematik axiomatisch zu begründen. Bei Kolmogoroff sind die zufälligen Ereignisse als Mengen dargestellt und die Wahrscheinlichkeit als ein auf Mengen definiertes und normiertes Maß.
Nun konnte die Wahrscheinlichkeitsrechnung in die moderne Mathematik integriert werden.
Seit die Grundlagen geklärt sind, machte sowohl die mathematische Theorie selbst als auch das ganze Gebiet der Anwendungem ungeheure Fortschritte. Menges spricht von "unserem statistischen Jahrhundert. ... Die Statistik ist zur charakteristischen Methode des modernen Wissenschaftsbetriebes geworden." (Menges, 1968, S. 16f)

1.2. Zum Begriff der Wahrscheinlichkeit

Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit ist viel philosophiert worden und auch heute - trotz der Lösung der rein mathematischen Grundlagen - geht die philosophische Diskussion weiter, vor allem, was das Verhältnis der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Wirklichkeit betrifft.
Eingangs hatte ich schon aus dem Philebos von Plato zitiert. Auch in der Rede des Timaios über die Entstehung der Welt ist von Wahrscheinlichkeit die Rede:"Die Aussagen von dem Beharrlichen, Gewissen, der Vernunft Offenbaren müssen beharrlich und unveränderlich sein - soweit möglich ist und es Reden zukommt, unwiderlegbar und unerschütterlich zu sein, daran dürfen sie nichts fehlen lassen; die aber von dem jenem Nachgebildeten, welches ein Abbild ist, die müssen wahrscheinlich sein und im Verhältnis zu jenen stehen; denn wie das Sein zum Werden, so verhält sich die Wahrheit zum Glauben. Wundere dich also nicht, o Sokrates, wenn wir in vielen Dingen über vieles, wie die Götter und die Entstehung des Weltalls, nicht imstande sind, durchaus und durchgängig mit sich selbst übereinstimmende und genau bestimmte Aussagen aufzustellen. Ihr müßt vielmehr zufrieden sein, wenn wir sie so wahrscheinlich wie irgendein anderer geben, wohl eingedenk, daß mir, dem Aussagenden, und euch, meinen Richtern, eine menschliche Natur zuteil ward, sodaß es uns geziehmt, indem wir die wahrscheinliche Rede über diese Gegenstände annehmen, bei unseren Untersuchungen diese Grenze nicht zu überschreiten."
(Platon, Timaios, 29 c,d)

Auch Epikur, der sich eng an die Atomlehre des Demokrit anlehnt und versucht, die Welt ganz aus dem natürlichen Zusammenhang der Dinge zu erklären, hält es für denkbar, daß sie sich in zufälligem Zusammenspiel der Urelemente zu ihrer jetzigen Form entwickelt hat. Diese Ideen werden in dem Lehrgedicht "De rerum natura" des Lukrez ganz in Epikurs Geiste besungen.A. Renyi zitiert in seinen "Briefen über die Wahrscheinlichkeit" auf Seite 59 und 89 einige Zeilen. Z.B.: "Denn nicht die Absicht haben die Urelemente der Dinge - Jedes der Reihe gemäß sich zusammengeordnet mit Spürsinn - Oder durch einen Vertrag die Bewegungen sämtlich vereinbart,- Sondern da viele von ihnen auf vielerlei Weise sich ändernd - Aus dem Unendlichen schwirren, wenn Stöße sie jagen durchs All hin, - Kommen sie, allerlei Art der Bewegung und Bindung versuchend, - Endlich

dabei wohl auch zu solchen Gestaltungen, wie sie - Unser bestehendes All zu seiner Erschaffung bedurfte; ..."

Von Wahrscheinlichkeit ist also schon sehr früh die Rede, und man könnte bei allen Philosophen, die kein völlig determiniertes Seiendes anerkennen, Passagen über Wahrscheinlichkeit finden, aber viel später erst wird versucht, den Begriff der Wahrscheinlichkeit mathematisch zu definieren.
Im Briefwechsel zwischen Pascal und Fermat kommt er noch nicht explizit vor.
In Huygens "De ratiociniis in ludo aleae" wird der Erwartungswert als Grundbegriff gewählt.
Erst in Bernoulli's "De arte conjectandi" wird die Wahrscheinlichkeit 'definiert'. Auf eher philosophische Art als "Grad der Gewißheit, welcher sich zur Gewißheit wie der Teil zum Ganzen verhält", aber daneben auch schon im klassischen Sinne, wie sie später Laplace in seiner "Théorie analytique de la probabilité" und in dem "Essai philosophique sur les probabilités" formuliert: "Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis der Zahl der günstigen Fälle zu der aller möglichen Fälle, wobei die verschiedenen Fälle als gleich möglich vorausgesetzt werden." (zitiert nach Renyi, 1969, S.81)

Der Laplace'schen Definition wurde immer wieder der Vorwurf gemacht, daß in ihr ein Zirkelschluß vorliege.
Renyi äußert sich folgendermaßen dazu: "Der Mangel dieser Definition besteht in Wirklichkeit nicht darin, daß ihr ein Circulus vitiosus, eine 'petition prinzipii' innewohnt (was auch heute noch oft behauptet wird), sondern vielmehr darin, daß sie im Grunde keine Definition ist. Auf die Frage, was die Wahrscheinlichkeit wirklich ist, gibt sie nämlich keine Antwort; sie gibt nur eine praktische Anweisung, wie man die Wahrscheinlichkeit in gewissen einfachen Fällen (in moderner Terminologie: in 'klassischen Wahrscheinlichkeitsfeldern') berechnen kann." (Renyi, 1969, S.82)

Da der Anwendungsaspekt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer relevant war - zuerst für Glücksspiele, später im gesamten Wissenschaftsbetrieb - gaben den wichtigsten Anstoß zu einer schärferen Herausarbeitung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs die

Anwendungen. L.Schmetterer schreibt dazu: "Aufbauend auf den noch durchaus in Gleichverteilungsvorstellungen befangenen Untersuchungen von R. Clausius, haben J.C. Maxwell und L.Boltzmann die statistische Betrachtung in die Gasdynamik eingeführt und den Rahmen der damaligen Wahrscheinlichkeitsrechnung gesprengt. Ganz deutlich spricht dies einmal M. v. Smoluchowski aus: "Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist die relative Häufigkeit des Eintritts bestimmter auffallender Ereignisse." (Schmetterer, 1957, S. 6)
Und bei A.Chintchin ist zu lesen: "In der Physik und auch in den anderen angewandten Wissenschaften bezeichnet die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses immer die relative Häufigkeit seines Eintretens." (Chintchin, 1956, S. 55)

Diese Definitionsversuche genügten aber nicht den Forderungen der modernen Mathematik, deren Kennzeichen die systematische Verwendung der axiomatischen Methode ist.
Kolmogoroff ist nun 1933 diese Axiomatisierung gelungen.
Diese Axiomatisierung "erhebt weder den Anspruch, das Wesen der Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, noch den , die Realgeltung von Wahrscheinlichkeitsaussagen zu verbürgen. Mit Hilfe der axiomatischen Methode wird die Wahrscheinlichkeit nur indirekt definiert durch Angabe gewünschter Eigenschaften und Relationen." (Menges, 1966, S. 29)

Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist also befriedigend axiomatisiert worden und Freudenthal/Steiner formulieren: "Damit ist, wie durch Hilberts Axiomatik aus der Geometrie, die Philosophie auch aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung verbannt." (Freudenthal/Steiner, 1966, S. 191)

Wenn man aber den Wahrscheinlichkeitsbegriff im Hinblick auf Unterricht und hier speziell für jüngere Schüler betrachtet, rücken vormathematische Überlegungen wieder in den Vordergrund.

1.2.1. Zur Ontologie der Wahrscheinlichkeit

In der Umgangssprache ist die Wahrscheinlichkeit ein Übergangsbegriff zur Gewißheit. "Ein Urteil oder eine Annahme ist glaubwürdig, wenn auch nicht gewiß, weil uns die Gründe, die dafür sprechen, gefühlsmäßig überzeugen, obwohl wir uns bewußt sind, daß sie nicht ausreichen, um das Urteil oder die Annahme zu beweisen."(A.Wenzl, 1948, S. 59)
Nun stellt sich aber die Frage "nach der Rechtfertigung der Wahrscheinlichkeitsschlüsse, nach dem zureichenden Grund für die Anwendung des Wahrscheinlichkeitskalküls". (Wenzl, 1948, S.59) Bringt eine Rechtfertigung nicht die Kausalität in eine Krise?

Die Relation zwischen Ursache und Wirkung kann nun auf zwei verschiedene Arten gesehen werden: Für den Deterministen kann eine bestimmte Ursache nur eine mögliche Wirkung haben, er bejaht das Kausalgesetz. Für den Indeterministen kann eine bestimmte Ursache mehrere mögliche Wirkungen haben. Er verneint zwar das Kausalgesetz, aber er negiert nicht die Forderung, daß jedes Geschehen eine Ursache haben muß, er akzeptiert das Kausalprinzip, den Satz vom zureichenden Grunde. (Vgl. Neuhäusler, 1967, S. 108)
Auf die Wahrscheinlichkeit bezogen, kann der "Determinist nur eine aposteriorische Wahrscheinlichkeit anerkennen und mehrere gleiche Möglichkeiten existieren für ihn in der Realität nicht. Das Gesetz der großen Zahlen "ergibt sich aus der Gleichverteilung der Abweichungen von der scheinbaren Gleichheit." (Wenzl, S.61)
Der Indeterminist akzeptiert, schon allein aus seiner eigenen Erfahrung, daß mehrere Ergebnisse möglich sind. "Es gibt eine sinnvolle Erwartung, daß etwas eher eintreten wird als nicht, obwohl es nicht eintreten müßte" und "das Gesetz der großen Zahlen beruht auf der ungefähren Gleichverteilung der Wahlen über gleiche Möglichkeiten." (Wenzl, S. 61)

In der mathematisch-philosophischen Diskussion über den Wahrscheinlichkeitsbegriff haben sich parallel zur Entwicklung der mathematischen Theorie zwei verschiedene Standpunkte herausgebildet, die eng mit der Kausalitätsproblematik zusammenhängen: Der subjektivistische und der objektivistische Standpunkt.

Ich werde mich hier an die Klassifikation von G.Menges halten, der die Wahrscheinlichkeit entsprechend den Methoden ihrer Messung in drei Richtungen einteilt: die subjektive Wahrscheinlichkeit (subjektiv a priori), die Häufigkeitswahrscheinlichkeit (objektiv a posteriori) und die logische Wahrscheinlichkeit (objektiv a priori). (Vgl. Menges, 1968, S. 31)

1.2.2. Der subjektive Standpunkt

Der Subjektivist geht aus von einem intuitiven, aus dem alltäglichen Erfahrungsbereich gewonnenen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Das Paradigma der subjektiven Wahrscheinlichkeit ist die Wettsituation. "Im Vorstellungsbereich der subjektiven Wahrscheinlichkeiten denkt man sich Personen, die in der Lage sind, ihre Erwartungshaltung bezüglich des Eintreffens von Ereignissen in einem bestimmten Sinne konsistent zu fixieren. Man stellt sich vor, daß eine solche Person für jedes Ereignis A die Frage beantwortet, welchen Betrag P(A) sie setzen würde für die Aussicht, im Falle des Eintretens von A den Betrag 1 zu erhalten und den Betrag 0 im Falle des Nichteintretens von A." (Dinges, 1976, S.91) Hier wird die Realität nicht aus zureichenden Gründen heraus erklärt und zu begreifen versucht. Die Objektivierbarkeit spielt keine wesentliche Rolle, denn die Wahrscheinlichkeit wechselt von Person zu Person. Einer der Hauptvertreter dieser Richtung, De Finetti, geht sogar so weit zu sagen: "Probability does not exist." (zit. nach Steinbring, 1980, S. 309)
Zu dieser Gruppe zählen weiter B.O.Koopman, E.Halphen, F.R.Ramsey und L.J.Savage, wobei die beiden letzteren zu den sog. 'Bayesianern' gehören, für die das Bayesche Theorem eine bedeutende Rolle spielt.(Vgl. Menges, 1968, § 25)

1.2.3. Der objektive a priori Standpunkt

Für diesen Standpunkt ist die Wahrscheinlichkeit nicht erst durch Erfahrung zu bestätigen, dh. durch empirisches Vorgehen, sondern sie ist a priorisch, von vornherein gültig. Ihre Methode ist also deduktiv. Das Paradigma dieses Standpunkts ist das Urnenmodell, der Würfel, die Münze, das Roulette, also Glücksspielsituationen. Menges schreibt dazu: "Mir sind mit Ausnahme von reinen Glücksspielsituationen nur ein paar Fälle aus der

Physik und der Biologie bekannt, wo man tatsächlich die Wahrscheinlichkeiten objektiv a priori festlegen kann." (Menges, 1966, S. 32) Laplace mit seiner Definition der gleichmöglich vorausgesetzten Fälle gehört hierher. Dann J.M Keynes, J.v.Kries und R. Carnap.
"Die Schwäche der objektiven A-priori-Bestimmung der Wahrscheinlichkeit liegt natürlich in der Schwierigkeit, dem Satz "S ist P" in sachlich gerechtfertigter Weise objektiv eine Zahl zwischen o und 1 zuzuordnen. Savage behauptet sogar, es existiere überhaupt kein befriedigendes objektives Zuordnungsverfahren. Das ist übertrieben, aber richtig ist wohl, daß man von der einerseits wunderbar einfachen und andererseits zugleich wissenschaftlich einwandfreien Möglichkeit der objektiven A-priori-Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nur selten Gebrauch machen kann, weil man nicht genügend A-priori-Wissen besitzt." (Menges, 1968, S. 32)

1.2.4. Der objektive a posteriori Standpunkt

Die objektiv a posteriorische Wahrscheinlichkeit, auch als frequentistische, statistische oder Häufigkeitswahrscheinlichkeit bezeichnet, ist induktiv, empirisch und synthetisch ausgerichtet.
Ist bei n Versuchen m-mal ein Ereignis E eingetreten, so ist nach dieser Interpretation die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von E

$$P(E) = \frac{m}{n} .$$

Um Zweifel zu beseitigen, daß n zu klein gewählt wurde, postulierte erstmals R.v.Mises die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als den Grenzwert der relativen Häufigkeit

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{m}{n}\right) = P(E) .$$

Diese Theorie stieß aber auf logische Schwierigkeiten. "Der Widerspruch, dem sie begegnet, richtet sich gegen die Voraussetzung der unendlichen Wiederholbarkeit eines Zufallsexperiments. ... Je größer n ist, desto größer ist die Gefahr, daß der Ursachenkomplex des Zufallsexperiments sich gewandelt hat. Besonders groß ist diese Gefahr natürlich im wirtschaftlichen und sozialen Bereich". (Menges, 1968, S. 33)

Sowohl unter den Subjektivisten als auch unter den Objektivisten sind bedeutende Wissenschaftler zu finden. Vielleicht kann man eines Tages beide Auffassungen in eine umfassende Theorie integrieren.
Als praktisch "wichtigste und am häufigsten angewendete" bezeichnet Menges die objektiv a posteriorische Richtung (S.33).
Steinbring sieht die "Schwäche beider Positionen, sowohl der objektiven als auch der subjektiven und auch ihre scheinbar strikte Gegensätzlichkeit ... in der zu einfachen Sicht auf die Theorie-Empirie-Beziehung." Weiter führt er aus: "Beide gehen letztlich von einer Identifikation aus, wobei die einen eher vom (objektiven) Gegenstand und die anderen vom (subjektiven) Wissen her urteilen; dies macht zudem deutlich, daß eigentlich kein grundsätzlicher Unterschied zwischen beiden Positionen besteht, dh. ein "absolut"subjektiver Standpunkt läßt sich nicht von einem "rein" objektivistischen unterscheiden." (S.312)

1.2.5. Von der intuitiven Wahrscheinlichkeit zur mathematischen Wahrscheinlichkeit

Jeder von uns benutzt gelegentlich in der Umgangssprache das Wort 'wahrscheinlich'. Im Deutschen zielt es - etymologisch gesehen - auf ein Gefühl der Erwartung. (Mauthner, 1910, S. 569)
In anderen Sprachen liegt der Schwerpunkt zum Teil anders, etwa beim lateinischen 'probabilitas', das Geprüfte, Taugliche, Beifallswerte, dessen Bedeutung mehr auf der Erfahrung fußt. (Stowasser/Petsching, 1919, S. 610)
Als deutsch Sprechender verbindet man also mit - wahrscheinlich- Erwartungsgefühle für das Eintreffen eines Ereignisses wegen einleuchtender aber nicht hinreichender Gründe.

H.Richter stellt in seinem Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie (1966) der Formulierung der mathematischen Axiome ausführliche Plausibilitätsbetrachtungen voran mit dem Ziel, daß die Axiome "anschaulich unmittelbar evident werden, sobald wir uns an das erinnern, was wir bereits intuitiv unter Wahrscheinlichkeit verstehen." (S. 44) Er geht von "verifizierbaren" Aussagen der Umgangssprache aus, in denen verschiedene "Gewichte

als Grad ihrer vermuteten Richtigkeit enthalten sind."
Zum Beispiel: "a) Es ist unwahrscheinlicher, mit diesem Würfel eine ungerade Zahl zu werfen als eine Sechs" oder "b) Es ist ungeheuer wahrscheinlich, ja praktisch sicher, daß diese Brücke keinen Konstruktionsfehler aufweist..." Richter beschreibt nun das Gemeinsame dieser Aussagen: "In allen Fällen gehen wir nämlich von einer bestimmten Situation S_o aus, für die uns eine Mehrzahl von möglichen Folgesituationen S_1, S_2 .... als denkbar erscheint." (S.45) Und etwas später: "Wir wollen das Gefühl, das uns die S_v mit verschiedener Sicherheit erwarten läßt, mit Erwartungsgefühl bezeichnen; die Wahrscheinlichkeiten mögen genauer intuitive Wahrscheinlichkeiten heißen."(S.46) Diese Wahrscheinlichkeiten bewegen sich zwischen praktischer Unmöglichkeit und praktischer Gewißheit. Sie haben subjektiven Charakter, da die "wahrscheinlichkeitsmäßige Rangordnung der S_v von verschiedenen Menschen ganz verschieden angesetzt wird. Wie bei allen intuitiven Bewertungen spielen hierbei Täuschungen, Sympathien usw. eine wesentliche Rolle." (S.47)
Nach diesen Überlegungen fragt Richter nun weiter, was man unter einem wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbegriff wohl zu verstehen habe, der dem intuitiven entsprechen könnte.
Nach einigen Ausführungen zum Standpunkt der deterministischen Naturwissenschaft, z.B. der klassischen Physik, stellt er folgendes indeterministisches Postulat auf: "Bei meßbar vorgegebener Ausgangssituation S_o mit den meßbar verifizierbaren Folgesituationen S_v ist jedem S_v eine reelle Zahl, objektive Wahrscheinlichkeit genannt, zugeordnet, die angibt, mit welcher Sicherheit wir S_v erhalten werden. Diese Wahrscheinlichkeit genügt Rechenregeln, die uns erlauben, aus Beobachtungsergebnissen auf ihre Größe zu schließen." (S.49)
Dieses Postulat versteht Richter nicht als Definition der Wahrscheinlichkeit, sondern als Programm,"die Indeterminiertheit des Geschehens mathematisch zu erfassen."
Diesen Übergang von der intuitiven zur objektiven Wahrscheinlichkeit erläutert Richter am Beispiel des Temperaturbegriffs, der "in ähnlicher Weise aus dem intuitiven Erlebnis des 'wärmer-kälter' entstanden" ist. "Stets beginnen wir mit dem Postulat, daß es möglich ist, dem intuitiven Begriff eindeutig festgelegte meßbare Größen entsprechen zu lassen. Die Beziehungen zwischen

diesen Größen werden in Axiomen ausgesprochen. Erst dann ist es möglich, auf Grund der aus den Axiomen fließenden Lehrsätze anzugeben, wie die Messung der fraglichen Größen nun tatsächlich erfolgen kann. Genau so ist es auch mit der Wahrscheinlichkeit: Erst dann, wenn wir bereits die Rechenregeln besitzen, denen die Wahrscheinlichkeit genügt, können wir uns überlegen, wie nun im einzelnen Falle der zahlenmäßige Wert der Wahrscheinlichkeit festgestellt werden kann." (S.50)

Das deterministische Modell wird insofern miteinbezogen, als die deterministische Unmöglichkeit und die deterministische Gewißheit als Grenzfälle aufgefaßt werden und so die Normierung $0 \leq p \leq 1$ zustandekommt.
Nach weiteren Plausibilitätsbetrachtungen resümiert Richter: "Die Besinnung auf den naturwissenschaftlichen und den intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff liefert damit die Begründung für die Setzung der Axiome in der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie." (S.59)

1.3. Fundamentale Ideen der Stochastik

D. Heitele hat in seiner Dissertation "Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in der Grundschule und Förderstufe" (1976) eine Liste"fundamentaler Ideen der Stochastik"zusammengestellt. Er geht dabei aus von dem Begriff der "fundamental ideas", den J.S.Bruner in seinem Buch "The Process of Education" (1960) als zweites von sechs Hauptkriterien für die Konstruktion eines neuen Curriculum anführt und wählt auch nur solche fundamentalen Ideen aus, die mit Hilfe "elementarster Mathematik zu verstehen sind."
Die Intention von Heitele ist didaktischer Natur und er charakterisiert sie folgendermaßen: "Konsequenterweise werde ich beim Aufstellen meiner Liste einen pragmatischen Standpunkt einnehmen und unter "fundamentalen Ideen" solche Ideen verstehen, die dem Individuum auf jeder Stufe seiner Entwicklung möglichst gute Erklärungsmodelle liefern und die sich auf den verschiedenen kognitiven Stufen nicht strukturell, sondern (im weitesten Sinne des Wortes) nur vom Sprachlichen und durch den Grad der Elaboriertheit her unterscheiden." (S.92)

(0) "Als eine der Stochastik in ganz besonderem Maße zugrundeliegende Leitidee ist das Verhältnis von Modell und Wirklichkeit im Sinne einer 'distanzierten Rationalität' zu sehen. Um geometrisch zu arbeiten, braucht man diese Sichtweise im allgemeinen nicht. Um stochastisch zu arbeiten, ist diese Sichtweise unbedingt nötig und zwar nicht primär aus wissenschaftstheoretischem Interesse, sondern zur Erklärung der stochastischen Verfahrensweisen, die im wesentlichen darin bestehen, einer stochastischen Umwelt stochastische Modelle aufzuprägen. Diese Leitidee durchzieht alle folgenden Ideen, weshalb ich sie an den Anfang stelle." (S.94)
Heitele führt noch zehn weitere fundamentale Ideen auf.

(1) Normierung unseres Erwartungsgefühls:
Das intuitive Erwartungsgefühl, das man dem Ausgang eines bestimmten Ereignisses A entgegenbringt, wird durch eine Zahl P(A) des Intervalls $[0,1]$ ausgedruckt. "Die Relation 'ist wahrscheinlicher als' geht über in die Relation '$\geq$' zwischen reellen Zahlen." (S.94)

(2) Das Wahrscheinlichkeitsfeld:
Die einem Zufallsexperiment zugeordneten Ergebnisse werden zu einer Ereignisalgebra zusammengefaßt, also nicht für sich allein betrachtet. Innerhalb dieser Ereignisalgebra kann man nun logische Operationen durchführen.
Diesen zweiten Begriff bezeichnet Heitele als fundamental, "weil hier durch die Aufprägung eines mathematischen Modells das Zufallsexperiment überschaubar geworden ist".

(3) Disjunktive Verknüpfung von Ereignissen - Additionsregel:
"Ist es noch möglich, auf Grund der ersten beiden Ideen nach subjektivem Dafürhalten Anfangswahrscheinlichkeiten festzusetzen, so geht dies nicht mehr ohne weiteres bei komplizierten Ereignisfeldern, wie etwa dem des dreifachen Würfelwurfs. Als vermittelnde Idee fungiert hier die Additionsregel, die es gestattet, innerhalb des mathematischen Modells aus einfachen Anfangswahrscheinlichkeiten neue Wahrscheinlichkeiten zu berechnen." (S.96)

(4) Verknüpfung von Zufallsexperimenten - Unabhängigkeit:
"Fundamental hierbei vor allem der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit p(A/H), die bei praktischen Anwendungen meist als Wahrscheinlichkeit für A, wenn H schon eingetreten ist, gedeutet wird. ... Ein vielleicht noch fundamentalerer Begriff, wenn man die Alltagserfahrungen zugrundelegt, ist der mathematisch zwar auf die bedingte Wahrscheinlichkeit zurückführbare, aber dennoch einer eigenen Betrachtung wert scheinende Begriff der Unabhängigkeit. Es erscheint mir fundamental, Zufallsexperimente, die offenbar keinen physikalischen Kausalzusammenhang aufweisen, als stochastisch unabhängig anzusehen." (S.96)

(5) Gleichverteilung und Symmetrie:
Bei vielen elementaren Zufallsexperimenten gibt es keinen Grund, die Elementarereignisse mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten zu versehen. Beim Würfeln z.B. wird dem Experiment Symmetrie aufgeprägt, weil man annimmt, daß keine Seite gegenüber der anderen bevorzugt wird.
Auch wenn die Gleichverteilung zunächst nicht angenommen werden kann, gibt es die Möglichkeit durch eine entsprechende "Verfeinerung des Ereignisraumes und zugehörige Symmetriebetrachtungen auf eine Gleichverteilung zu kommen". (S.97)

(6) Kombinatorische Ideen:
"Die große Leistung der Kombinatorik besteht darin, daß sie komplizierte Zufallsexperimente nach ihrer Zusammensetzung aus einfacheren in bestimmte Standardtypen klassifiziert und so dem tätigen Mathematiker zur numerischen Behandlung Standardmodelle liefert." (S.99)

(7) Urnenmodell und Simulation:
Heitele nennt drei wesentliche Gründe, warum das Urnenmodell fundamental ist:
"1. Das Urnenmodell gestattet einen ganzheitlich-anschaulichen Zugang von der Realität zum mathematischen Modell.
2. Begriffe wie 'zufällige Auswahl', 'Unabhängigkeit', 'Gleichverteilung' bekommen im Urnenmodell eine anschauliche und prägnante Bedeutung zugleich.
3. Mit Urnen läßt sich jedes Zufallsexperiment simulieren." (S.99)
Und zur Simulation schreibt er:
"Die Idee der Simulation ist deswegen so fundamental, weil
1. hieran wohl am deutlichsten sichtbar wird, wie der Mensch der Umwelt stochastische Modelle aufprägt;
2. weil die Möglichkeit der Simulation auf das allerdeutlichste zeigt, daß bei oftmaliger Wiederholung von Zufallsexperimenten sich eine innerstochastische Gesetzmäßigkeit herausstellt. (Prinzip der großen Zahl!)" (S.99)

(8) Die Idee der Zufallsvariablen:
"Sicherlich ist es keine Übertreibung zu sagen, daß erst der Begriff der Zufallsvariablen und des darauf aufgebauten begrifflichen Apparates die Wahrscheinlichkeitsrechnung über das Stadium der mathematischen Erfassung von Glücksspielen wesentlich hinausgebracht hat und die mannigfachen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der angewandten Statistik ermöglicht hat. .. . Als Erklärungsmodell spielt der Begriff der Zufallsvariablen vor allem von drei Aspekten her eine wichtige Rolle:
von der Verteilung einer Zufallsgröße, von der Verknüpfung von Zufallsgrößen zu neuen und vom Erwartungswert einer Zufallsgröße her." (S.100)
(9) Aussagen zur "Großen Zahl":
Heitele deutet das Gesetz der großen Zahlen "als fundamentale Erklärung a posteriori dafür, daß das Wahrscheinlichkeitsmodell gut gewählt war." (S.102)

(10) Die Idee der Stichprobenentnahme:
Paradigmata dieser fundamentalen Idee sind etwa der Regenfall auf Pflastersteine oder Blutentnahmen zu diagnostischen Zwecken. Heitele betont zu Recht, daß sich "unser ganzes Wissen und unser ganzes Urteilen auf Stichproben" stützt. "Vorurteile sind nichts anderes als Urteile auf Grund nicht repräsentativer Stichproben." (S.102)

1.4. Fundamentale Fehler beim intuitiven Umgang mit Wahrscheinlichkeit

Jeder von uns wird immer wieder mit Unsicherheitssituationen konfrontiert, in denen er subjektiv Wahrscheinlichkeiten gebraucht. Es gibt einige typische Fehler beim intuitiven Umgang mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff, die ich im folgenden etwas erläutern möchte.

1.4.1. Irrige Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit

D. Guderian nennt einige Beispiele aus dem täglichen Leben, in denen leichtfertig gleichwahrscheinliche Ausgänge angenommen werden. Eines davon ist das folgende: " Der spätere Berufstätige als Mechaniker, der sich allein eine Reparaturwerkstatt einrichtet, dabei jedes Ersatzteil des von ihm schwerpunktmäßig zu reparierenden Fahrzeugtyps dreimal auf Lager legt und sich wundert, wenn trotz der hohen Geldinvestition bereits nach kurzer Zeit viele Teile eilig nachgekauft werden müssen, während von anderen teuren Teilen noch alle drei Stücke im Lager liegen." (Guderian, 1973, S. 120)
Beispiele für diese Art Fehlverhalten findet man in allen Bereichen des täglichen Lebens.

In Glücksspielsituationen werden auch häufig Fehler in dieser Richtung gemacht.
Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten geht es vielfach um Fragestellungen folgender Art: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten mindestens eines Erfolgs bei n Versuchen. Das erste Problem des Chevalier de Méré gehört in diese Kategorie.
Am Beispiel des zweifachen Münzwurfs kann man das Fehlverhalten ganz leicht erklären. Nehmen wir an, eine Person hält die Ereignisse "Keinmal Wappen", "Einmal Wappen" und "Zweimal Wappen" für gleichwahrscheinlich. Dann macht sie den Fehler, daß sie das Ereignis "Einmal Wappen" als Elementarereignis betrachtet und nicht erkannt hat, daß dieses Ereignis zwei Ergebnisse beinhaltet, nämlich (Wappen,Zahl) und (Zahl,Wappen).

Ein weniger triviales Beispiel nennen Lindenau/Schindler: Sechs Personen steigen in einen aus 3 Wagen bestehenden Zug.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit steigt in jeden Wagen wenigstens eine Person? Jemand überlegt sich: Für die Verteilung der 6 Personen auf die drei Wagen A, B C gibt es die Möglichkeiten (6,0,0), (0,6,0), (0,0,6), (5,0,1), (5,1,0), (0,5,1), (1,5,0), (0,1,5), (4,0,2), (4,2,0), (4,1,1), ... , (2,2,2). Er findet auf diese Weise 28 Zahlentripel (a,b,c) mit a + b + c = 6. In genau 10 Tripeln taucht keine 0 auf; das bedeutet, daß in 10 Fällen jeder Wagen belegt wird. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{10}{28}$. Diese Antwort ist falsch; der Fehler steckt wieder darin, daß die 28 Elementarereignisse nicht gleichwahrscheinlich sind; so hat z.B. (6,0,0) die Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{3})^6$, während (2,2,2) die Wahrscheinlichkeit $\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot (\frac{1}{3})^6$ hat (man mache sich klar, daß es für die Verteilung von 6 Personen auf 3 Wagen 3^6 Möglichkeiten gibt und daß in (2,2,2) bereits 90 dieser Möglichkeiten zusammengefaßt sind). In der ersten "Lösung" erscheint uns das zu (6,0,0), ... , (2,2,2) führende Einteilungsprinzip so naheliegend, daß wir die Frage nach der Gleichwahrscheinlichkeit der Fälle zunächst gar nicht stellen." (Lindenau/Schindler, 1976, S.46)

1.4.2. Fälschliche Aberkennung der Gleichwahrscheinlichkeit

Bei vier Würfen mit einer Münze hält jemand das Ergeonis (w,w,z,z) für wahrscheinlicher als das Ergebnis (z,z,z,z).

Beim Wurfeln denken nicht nur Kinder, daß die Sechs seltener erscheint als die übrigen Augenzahlen.

Beim Ausfüllen eines Lottozettels "6 aus 49" wird eine gut gemische Auswahl bevorzugt. (Vgl. auch Item 10 des Tests)

1.4.3. Fälschliche Aberkennung der Unabhängigkeit von Zufallsexperimenten

D.Heitele hat im WS 1973/74 ca. 50 Mathematikstudenten der Pädagogischen Hochschule Dortmund, die durchweg keinen Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung gehabt hatten, folgende Frage vorgelegt und 94% bzw. 49 % falsche Antworten erhalten:
"Beim Roulettespiel ist in einer Serie fünfmal hintereinander "Rot" gefallen.
a) Wie hoch schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein

solches Ergebnis ein?(94% falsche Antworten)

b) Welche Strategie empfiehlt sich für das folgende Spiel
Ich tippe auf'Schwarz',
ich tippe auf'Rot;
ist egal?
(49% falsche Antworten)" (Heitele, 1976, S. 149)

Dieses Verhalten der Studenten braucht einen aber gar nicht zu wundern, denn es gibt überlieferte Beispiele, in denen bedeutende historische Persönlichkeiten ähnlich falsch reagierten.
Man denke nur an d'Alembert. Er weigerte sich Zeit seines Lebens zu akzeptieren, daß beim Münzwurf die Wahrscheinlichkeit für "Wappen" 1/2 ist, auch wenn im Versuch vorher "Wappen" geworfen worden war, obgleich Euler ihn immer wieder umzustimmen versuchte. (Vgl. Cantor, 1965, S. 222f)

Daß Nicht-Mathematiker falsche Vorstellungen hatten, wundert einen nun gar nicht mehr.
Lessing etwa schrieb an Madame König im Jahre 1770, daß er in der Lotterie mit dem Los Nr. 19 gewonnen habe, daß er wieder spielen wolle,aber nicht auf die Nummer 19 setzen werde, "denn 19 wird doch nicht des Henkers sein und sich wieder herausziehen lassen". (Vgl. Kreyszig, 1968, S. 57)

Und in unserem Jahrhundert schreibt Tom Stoppard in den Vorbemerkungen zum ersten Akt seines Schauspiels "Rosenkranz und Güldenstern": "Güldensterns Beutel ist fast leer, der von Rosenkranz fast voll. Das hat einen Grund: sie wetten um Geldstücke, die sie in die Luft werfen, und zwar auf folgende Weise: Güldenstern nimmt eine Münze aus seinem Geldbeutel, wirft sie in die Luft und läßt sie dann zu Boden fallen. Rosenkranz betrachtet sie, verkündet -wahrheitsgemäß- "Kopf" und steckt die Münze in seinen Geldbeutel. Dann wiederholen sie den ganzen Vorgang. Offensichtlich treiben sie das schon längere Zeit. Eine solche Serie von "Köpfen" ist eigentlich unmöglich ..." (T.Stoppard, 1967, S.9)

Diese Beispiele könnte man beliebig fortsetzen, wenn man etwa in Zeitungen und Illustrierten gezielt suchen würde. Ich denke hier z.B. an den Oetker-Entführungsprozeß im Frühjahr 1980, wo der Angeklagte seine Einnahmen dank eines ausgeklügelten

Spielsystems in einem Spielcasino gewonnen haben wollte. Viele Leser fanden wohl solch eine Argumentation nicht absurd, denn die falsche Vorstellung, daß ein Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses E und der Häufigkeit des tatsächlichen Eintretens von E in einer langen Reihe von Versuchen bestehe, ist weit verbreitet. Begründungen wie: "Ein Wechsel ist fällig" oder "Diese Zahlen haben einen Nachholbedarf" sind häufig zu hören. Dies sind falsche Interpretationen eines intuitiv als gültig angesehenen Bernoullischen Gesetzes der großen Zahlen.

1.4.4. Eine wesentliche Information wird nicht berücksichtigt

"Anstelle der bedingten Wahrscheinlichkeit w(A/B) wird die Wahrscheinlichkeit w(A) betrachtet.
Der Motor meines PKW's springt nicht mehr an. Da ich das Auto schlecht gepflegt habe, weiß ich, daß sowohl die elektrische Anlage (Zündkerzen, Zündkontakte, ...) als auch das Kraftstoffversorgungssystem in schlechtem Zustand sind. Bezeichnet K das Ereignis "die Störung hat ihre Ursache in der Kraftstoffzufuhr" und E das Ereignis "die Störung hat ihre Ursache in der elektrischen Anlage", so will ich annehmen, daß K und E gleichwahrscheinlich sind und daß keine sonstigen Störungsursachen eine Rolle spielen, also $w(K) = w(E)$ und $w(K \cup E) = 1$. Nun untersuche ich die Zündkontakte und stelle fest, daß sie defekt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich nun auch noch in der Kraftstoffzufuhr ein Fehler?
Man könnte meinen, diese Wahrscheinlichkeit sei nach wie vor gleich w(K). Solch eine Antwort würde der gestellten Frage nicht gerecht, denn die Information, daß E eingetreten ist, wird dabei gar nicht ausgenutzt. Ist z.B. $w(K) = w(E) = 0{,}55$, so ist vielmehr die Wahrscheinlichkeit von K, wenn wir schon wissen, daß E eingetreten ist, gleich

$$w(K/E) = \frac{w(K \cap E)}{w(E)} = \frac{w(K) + w(E) - w(K \cup E)}{w(E)} = \frac{0{,}1}{0{,}55} \approx 0{,}18,$$

also wesentlich kleiner als w(K)!" (Lindenau/Schindler, S.49)

1.4.5. Kombinatorische Probleme

"Einfache Kombinatorik ist das Rückgrat elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung. Schwere Fehler in einfachen kombinatorischen Aufgaben sind häufig, auch bei unseren ersten Semestern, die doch allerlei Mathematik kennen sollten. Die Mathematik, die man zu solchen kombinatorischen Problemen braucht, ist ja sehr einfach. Worauf es ankommt, ist, diese Probleme zu mathematisieren, die ja im allgemeinen nicht schon in mathematischer Formulierung gegeben sind, aber mit so etwas hat man unsere Studenten auf der Schule nicht viel gequält. Die Schwierigkeit liegt in der Mannigfaltigkeit von Verkleidungen, in denen isomorphe Probleme sich zeigen können. ... Man nehme folgendes Beispiel: Man hat drei Zimmer mit je zwei Betten und soll drei Ehepaare da so unterbringen, daß jeweils Mann und Frau in verschiedenen Betten desselben Zimmers schlafen. Auf wieviel Arten geht das? Die Studenten überlegen sich richtig, daß man die drei Paare auf 3! = 6 Arten über die Zimmer verteilen kann, daß dann dem Paar im ersten Zimmer auf zwei Arten die zwei Betten zugewiesen werden können, auf zwei Arten im zweiten Zimmer, auf zwei im dritten - das macht 6 + 2 + 2 + 2 = 12 Arten. Wenn solche Antworten an der Universität gegeben werden, stimmte etwas (oder sogar viel) nicht im mathematischen Schulunterricht,...' Freudenthal, 1973/74, S. 540)
Heitele erhielt von Mathematikstudenten bei kombinatorischen Aufgaben (z.B. zweimaliger Münzwurf und Frage nach den zu erwartenden Häufigkeiten für (z,z), (w,w) und "gemischt" eine Erfolgsquote von nur 40%. (Vgl. Heitele, 1976, S. 153)

1.4.6. Stichproben werden leichtfertig als zufällig dh. repräsentativ angenommen und falsche Schlüsse daraus gezogen

Wir wissen, daß z.B. bei Telefonnummern die ersten zwei Ziffern in bestimmten Stadtteilen gleich sind. Eine Tabelle mit Telefonnummern ist also sicher als Zufallsgenerator nicht geeignet. Wallis/Roberts nennen ein Spiel, das auf dieser Eigenschaft der meisten Tabellen basiert: "Man nehme irgendein Handbuch mit recht vielen statistischen Tabellen, öffne das Buch, wie es gerade kommt, und verlese die Zahlen in einer Kolonne. Für jede Zahl, die mit 1,2,3 oder 4 beginnt, soll Müller an Schulze einen Groschen bezahlen; für jede Zahl, die mit 5,6,7,8,9 beginnt,

soll Schulze an Müller einen Groschen bezahlen. Schulze wird ein reicher Mann." (Wallis/Roberts, 1969, S. 275)

Unzulässigen Verallgemeinerungen aufgrund nicht repräsentativer Stichproben begegnet man im täglichen Leben auf Schritt und Tritt. Witze und Cartoons schöpfen unbegrenzt aus dieser Quelle. Aber nicht nur so harmlos sind die Folgen von Fehlinterpretationen. Man denke nur an die vielen Vorurteile, die im Laufe der menschlichen Geschichte verhehrende Folgen nach sich gezogen haben!

1.4.7. Falsche Schätzung von Wahrscheinlichkeiten

"Wenn man in einer Gesellschaft von 60 Leuten fragt, wie wahrscheinlich es sei, daß im Saale mindestens zwei mit demselben Geburtstag sitzen, wird man immer wieder erfahren, daß diese Wahrscheinlichkeit gewaltig unterschätzt wird. Der Mathematiker, der das vorführt, ist wie ein Zauberkünstler eines Publikumserfolges versichert, wenn bei der Probe aufs Exempel statt eines sogar mehrere Paare oder ein Tripel mit demselben Geburtstag ermittelt werden." (Freudenthal, 1973/74, S. 531)
Die Wahrscheinlichkeit, daß von sehr vielen, seltenen Ereignissen wenigstens eines eintritt, wird also häufig fälschlicherweise sehr gering eingeschätzt.
Lindenau/Schindler nennen ebenfalls ein sehr prägnantes Beispiel: "In einem Buch mit 300 Seiten befinden sich im ganzen 74 Druckfehler. Auf wieviel Seiten kann man mindestens mit zwei Druckfehlern rechnen? Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es überhaupt eine Seite mit zwei oder mehr Druckfehlern gibt, wird von uns gewaltig unterschätzt, da ja im Durchschnitt nur etwa 1 Druckfehler auf 4 Seiten kommt. In Wirklichkeit ist diese Wahrscheinlichkeit fast 100%, und es läßt sich mit Hilfe der Poissonverteilung berechnen, daß bei 300 Seiten und 74 Druckfehlern sogar auf ungefähr 8 Seiten mit mehr als einem Druckfehler zu rechnen ist." (Lindenau/Schindler, S. 50)

Aber nicht nur Laien haben Schwierigkeiten mit der Schätzung von Wahrscheinlichkeiten. Freudenthal führt folgendes Beispiel an: "Ein erstaunlicher Fall ist die traditionelle Aburteilung Mendels auf statistische Indizien hin. In seinen berühmten

genetischen Versuchen mit Erbsen hatte Mendel sieben Kennzeichenpaare betrachtet, je eines rezessiv und das andere dominant, die wir wie üblich mit a,b,c,d,e,f,g bzw. A,B,C,D,E,F,G bezeichnen wollen. Der Zufall wollte, daß bei den 33 verschiedenen Sorten, die er von Samenhändlern gekauft hatte, zu jedem der sieben Kennzeichen (mindestens) ein Paar vorkam, das sich genau in diesem Kennzeichen unterschied. Ein merkwürdiger Zufall - sagten statistische Kritiker - der so etwas Unwahrscheinliches zutage fördert! Also - meinten sie - hat Mendel wohl gemogelt, denn das ist die statistische Schlußfolgerung, wenn einer behauptet, daß es sehr unwahrscheinlich sei. Dies Urteil über Mendel ist auch von hervorragenden Statistikern übernommen worden; es steht heute in wohl jedem Buch über Mendel. Erst vor kurzem hat B.L. van der Waerden wirklich ausgerechnet, wie groß die Wahrscheinlichkeit nun eigentlich ist, daß unter 33 Sorten zu jedem der sieben Kennzeichen ein Paar vorkommt, das sich genau in dem Kennzeichen unterscheidet. Es kam 97 1/2 % heraus. Was Mendel berichtete, war also durchaus nicht unwahrscheinlich, es war im Gegenteil äußerst wahrscheinlich." (Freudenthal, 1973/74, S. 532)

1.5. Argumente für bessere stochastische Bildung aus der Sicht der Fachwissenschaft

Jeder Hochschullehrer, der einen Einführungskurs in Wahrscheinlichkeitstheorie liest, beginnt mit Plausibilitätsbetrachtungen, um die folgenden Axiome intuitiv zu untermauern. Unter Punkt 1.2.5. habe ich vor allem Richter (1966) zitiert. Ähnliche Vorbemerkungen kann man in den allermeisten Lehrbüchern finden.

Die Fachwissenschaft erhofft sich richtige Intuitionen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, um problemlos darauf aufbauen zu können.

Es ist also wünschenswert, daß die angehenden Mathematikstudenten eine möglichst gute schulische Ausbildung in elementarer Stochastik vorweisen können und Fehler im intuitiven Verständnis von Wahrscheinlichkeit nicht vorliegen.

Dies gilt übrigens nicht nur für Mathematikstudenten, denn Stochastikkurse müssen in den meisten anderen Fakultäten ebenfalls erfolgreich absolviert werden.

Ein weiterer Gesichtspunkt, der auch immer wieder von Mathematikern und Mathematikdidaktikern angeführt wird, ist der, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik auch deshalb im Unterricht nicht fehlen sollte, weil gerade sie eine Illustration der axiomatischen Verfahrensweise in der modernen Mathematik ermöglicht. Hier wird auf den Strukturaspekt der Wahrscheinlichkeitstheorie verwiesen. Diese Argumentation findet sich z.B. bei Rényi, 1970, S. 275 oder bei Jeger, 1966, der schreibt: "Der axiomatische Aufbau der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Anknüpfung an die Mengenalgebra passen gut ins Konzept der gegenwärtigen Reformbestrebungen. Da das zugehörige Axiomensystem noch relativ übersehbar ist und die interessanten Sätze bereits in unmittelbarer Nähe der Axiome stehen, wird dieser Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung im neuzeitlichen Unterricht oft geradezu als Musterbeispiel für den axiomatischen Stil hingestellt. ... Bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung treten zwei wesentliche Strukturen in Erscheinung, ... die Struktur des Booleschen Verbandes und die Maß-Struktur." (1966, S.21)

Auch Kütting (1962) spricht von der "Überlegenheit eines axiomatischen Aufbaues". (S.63)
Eine dritte Art der Argumentation für Stochastikunterricht aus der Sicht der Fachwissenschaft bezieht sich auf die fundamentale Leitidee der Stochastik (vgl. S.18f), nämlich das Verhältnis von Modell und Wirklichkeit. So schreibt z.B. Freudenthal (1974): "Will man die Wahrscheinlichkeitstheorie anwenden, so braucht man nicht zwischen die Mathematik und die Realität tiefe physikalische Theorien zu schieben; man kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung fast so direkt wie das elementare Rechnen auf die Wirklichkeit anwenden, d.h. mittels Modellen, die jeder ohne weiteres verstehen kann." (S. 526), und etwas weiter: "Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, recht verstanden, die schönste Gelegenheit, Schüler erfahren zu lassen, wie man mathematisiert - sie ist nicht nur die schönste, sondern vielleicht nach dem elementaren Rechnen, die erste und letzte Gelegenheit, nachdem schlecht begriffene Deduktivität andere Zweige der Mathematik überwuchert hat." (S. 536)

2. Entwicklungs- und lernpsychologischer Aspekt

Nach der mathematisch-erkenntnistheoretischen Sachanalyse ist nun der psychologische Aspekt zu berücksichtigen.
Wie wir gesehen haben, erhofft sich die Fachwissenschaft ein Fundament, auf dem sie problemlos aufbauen kann. Nun stellt sich die Frage, an welchem Entwicklungsstand mit dieser Fundierung begonnen werden könnte.
In der Entwicklungspsychologie hat als erster J.Piaget Untersuchungen zur Entwicklung mathematischer Begriffe durchgeführt, ja man kann sogar sagen, daß bei ihm die intellektuellen Operationen mathematisch definiert werden.
Im folgenden werde ich zuerst kurz auf Piagets Theorie eingehen und dann seine Versuche zur Entwicklung des stochastischen Denkens beschreiben und seine Ergebnisse erläutern.
Anschließend werde ich auch auf neuere Untersuchungen zu sprechen kommen.

2.1. Die kognitive Entwicklung nach J. Piaget

Für Piaget ist Intelligenz die "höchste und beweglichste Form der Anpassung des Organismus an die Umwelt" (Oerter, 1971, S. 348)
Zur Beschreibung dieses Anpassungsvorgangs verwendet Piaget drei Begriffe: kognitives Schema, Assimilation und Akkommodation.
Mit Hilfe der kognitiven Schemata kann der Mensch Umwelteindrücke einordnen, also Erfahrungen machen. Unter Assimilation versteht Piaget die Anpassung der Umwelt an das Individuum, d.h. Umwelteindrücke werden in vorhandene Schemata eingeordnet; unter Akkommodation den Prozeß der Anpassung des Individuums an die Umwelt, d.h. hier werden die Schemata an die Umwelt angepaßt.
Assimilation und Akkommodation ergänzen sich gegenseitig. "Durch das Zusammenspiel beider kann ein fließender Gleichgewichtszustand erreicht werden. .. Die höchste Gleichgewichtsform stellt das operative Denken dar, womit das logische Denken gemeint ist." (Oerter 1971, S. 350) Es werden also im Laufe der Entwicklung bereits vorhandene Schemata neu koordiniert. Je höher die Stufe, umso komplexer und reversibler werden diese Schemata.

Piaget unterscheidet fünf wichtige Abschnitte in der kognitiven Entwicklung:

- sensomotorische Intelligenz (ca 0-2 J.)
- vorbegriffliches Denken (ca 2-4 J.) } präoperatives Denken
- anschauliches Denken (ca 4-7 J.) }
- Denken in konkreten Operationen (ca 7-11 J.)
- Denken in formalen Operationen (ab ca 11 J.)

Jedes höhere Niveau baut auf dem darunterliegenden auf. "Von den spontanen Bewegungen und dem Reflex zu erworbenen Gewohnheiten und von diesen zur Intelligenz gibt es eine kontinuierliche Progression." (Piaget/Inhelder 1978, S. 12)

Im sensomotorischen Stadium entwickelt sich z.B. als spezielle Methode der Akkommodation die Nachahmung und als spezielle Methode der Assimilation das Spiel. In dieser Phase ist das Kind noch ganz und gar seiner unmittelbaren Umgebung zugewandt, der Abstand zu einem Gegenstand muß zeitlich und räumlich sehr klein sein. "Vor allem bestehen die Tätigkeiten der sensomotorischen Intelligenz ausschließlich darin, aufeinanderfolgende Wahrnehmungen und ebenfalls aufeinanderfolgende wirkliche Bewegungen miteinander zu koordinieren. Sie können also lediglich eine Aufeinanderfolge von Zuständen erzeugen, die durch kurze Vorwegnahmen und Wiederherstellungen miteinander verbunden sind, ohne aber je zu einer Gesamtvorstellung zu gelangen. Diese kann nur unter der Voraussetzung entstehen, daß die verschiedenen Zustände durch das Denken gleichzeitig erlebt werden, d.h. dem zeitlichen Ablauf der Handlung entzogen werden. Mit anderen Worten: die sensomotorische Intelligenz geht wie ein langsam abrollender Film vor, bei dem man nacheinander zwar alle Bilder sieht, aber unabhängig voneinander, ohne die zum Verständnis des Ganzen unerläßliche kontinuierliche Schau." (Piaget 1971, S. 137)

Das Denken muß nun, ganz wie die sensomotorische Intelligenz auch, neu aufgebaut werden.

Grundlegend für die Entwicklung des Denkens ist die Bildung der Vorstellung. Das Kind lernt allmählich, zwischen realem Objekt und Symbol zu unterscheiden, es beginnt zu sprechen.

Die Begriffe sind vorerst noch anschaulich, das Denken erfolgt in Vorstellungen. "Soweit das anschauliche Denken die wirklichen Handlungen durch bildliche Gedankenexperimente nachahmt, stößt es sich an dem Hindernis, daß man tatsächlich nicht gleichzeitig zwei Ketten mit denselben Perlen machen kann; während es für das operative Denken, das durch verinnerlichte und vollkommen reversibel gewordene Tätigkeiten vorgeht, kein Hindernis gibt, gleichzeitig die beiden Hypothesen aufzustellen und zu vergleichen." (Piaget 1971, S. 151)
Im Stadium des anschaulichen Denkens erreicht das Kind einen Gleichgewichtszustand, indem es sich auf nur einen Blickpunkt zentriert und alle übrigen beiseite läßt. Es denkt stark egozentrisch, weil es sich nur auf die eigene (innere) Tätigkeit konzentrieren kann. Ein Verständnis für die Situation anderer ist noch nicht möglich.

Auf der Stufe der konkreten Operationen werden nun diese Beschränkungen aufgegeben. Operationen können voll koordiniert werden. "Nun ... führt das Kind bei einem Intelligenzakt nicht nur eine bestimmte innere Handlung aus, sondern die zur Lösung des Problems gerachte Operation erfolgt innerhalb eines ganzen Systems von Operationen desselben Typs. Dieses System nennt Piaget eine "Gruppierung"." (Oerter 1971, S. 359)
Oerter erläutert am Beispiel einer Klassifizierungsoperation das Zusammenwirken der fünf Gleichgewichtsbedingungen einer Gruppierung: (Man hat 6 braune und 2 weiße Holzperlen und fragt, ob mehr Holzperlen oder mehr braune Perlen vorhanden sind)
"An der Lösung 'Es gibt mehr Holzperlen als braune Perlen' sind die oben genannten Bedingungen in der folgenden Weise beteiligt (in Klammern jeweils als logistische Gleichung):
Komposition: braune Perlen und weiße Perlen bilden zusammen alle Holzperlen ($x + x' = y$)
Reversibilität: Nimmt man von allen Holzperlen die (zuvor hingelegten) braunen weg, so bleiben die weißen übrig. Nimmt man von allen Holzperlen die weißen weg, so bleiben die braunen übrig ($y - x = x'$; $y - x' = x$).
Assoziativität: Man kann entweder zuerst die weißen Perlen nehmen und dann die braunen hinzulegen oder erst die braunen nehmen und die weißen hinzufügen. In beiden Fällen hat man alle Holzperlen beieinander ($x + x' = x' + x = y$).

Identität: Man kann die Aufteilung der Holzperlen in braune und weiße Perlen jederzeit rückgängig machen und hat dann den gleichen Zustand wie ganz am Anfang (z-z = o).
Tautologie: Fügt man zu den braunen Holzperlen weiße Holzperlen hinzu, so hat man hinterher auch wieder nur Holzperlen (y + y = y).
Alle diese klassifikatorischen Beziehungen hat das Kind bei der Lösung der Aufgabe gegenwärtig. Wie man leicht einsehen kann, würde nämlich die Vergegenwärtigung einer oder zweier Beziehungen allein kein Gleichgewicht herbeiführen." (Oerter 1971, S. 361)
Piaget erläutert die Grenzen des konkret-operativen Denkens folgendermaßen: "Es ist aber wichtig zu betonen, daß diese verschiedenen, logisch-arithmetischen und räumlich-zeitlichen Gruppierungen noch weit davon entfernt sind, eine formale Logik zu bilden, die auf alle Begriffe und Schlüsse anwendbar wäre. Das ist ein wesentlicher Punkt, den man sowohl in bezug auf eine Theorie der Intelligenz als auch ihrer pädagogischen Anwendungen hervorheben muß, wenn man den Schulunterricht - im Gegensatz zum traditionellen Logizismus - den Ergebnissen der Entwicklungspsychologie anpassen will. In der Tat sind die gleichen Kinder, die die eben beschriebenen Operationen ausführen können, im allgemeinen dazu unfähig, wenn sie auf rein sprachlicher Ebene Schlußfolgerungen ziehen sollten, ohne zugleich mit Gegenständen umgehen zu können. Die Operationen, um die es sich hier handelt, sind also noch 'konkret' und nicht 'formal': immer mit der Handlung verbunden, geben sie dieser eine logische Struktur, in der die sie begleitenden sprachlichen Ausdrücke miteinbezogen sind, was aber noch nicht die Fähigkeit einschließt, einen von der Handlung unabhängigen Schluß zu entwickeln." (Piaget 1971, S.164f)
In diesem Stadium bildet das Kind den Zahlbegriff, den Zeit- und den Raumbegriff. Es entwickeln sich jetzt fundamentale mathematische und physikalische Begriffe, wie Länge, Fläche, Volumen, Masse und Gewicht.

Auf der letzten Stufe der Intelligenzentwicklung - dem formal-operativen Stadium - werden dem Kind die Operationen bewußt, es beginnt über sie zu reflektieren. "Der Jugendliche wendet nun das Denken auf Annahmen an, die in der Außenwelt nicht gegeben sind. Er kommt aufgrund der reflektierten Anwendungen

der Operationen zu Schlüssen, deren Richtigkeit nicht an der äußeren Realität überprüft zu werden braucht. Damit kann sich der Jugendliche der formalen Logik bedienen und mathematisch denken." (Oerter 1971, S. 362)

2.2. Piagets Untersuchungen zur Entwicklung stochastischer Begriffe

Alle Eltern wissen aus eigener hinlänglicher Erfahrung, daß Kinder im sog. Fragealter unermüdlich Warum-Fragen stellen. Piaget hat sich in seinen Schriften "La causalité physique chez l'enfant" und "La représentation du monde chez l'enfant" mit diesem Phänomen beschäftigt. Er untersuchte u.a. die Formulierung dieser Fragen, denn er vermutete, daß bereits aus der Art der Fragestellung Schlüsse auf die erwartete Antwort gezogen werden können. "Die Warum zeugen von einer Vorkausalität zwischen der wirkenden Ursache und dem Endzweck und sie wollen, unter diesen beiden Gesichtspunkten, insbesondere einen Grund für die Phänomene finden, die für uns zufällig sind, die aber im Kind umsomehr das Bedürfnis nach einer finalistischen Erklärung wecken. 'Warum gibt es zwei Salève (Berge bei Genf), einen großen und einen kleinen?' fragt zum Beispiel ein sechsjähriger Knabe. Auf diese Frage haben fast alle Gleichaltrigen geantwortet: 'Weil es einen für die großen Spaziergänge und einen für die kleinen braucht." (Piaget 1978, S.82)
Im Weltbild dieser Altersstufe gibt es noch keinen Zufall. "Interessant an den Reaktionen des Kindes auf das Zufällige ist, daß es den Begriff des Zufalls oder der irreversiblen Vermischung so lange nicht versteht, als es noch nicht im Besitz von reversiblen Operationen ist, die ihm als Bezuge dienen, während es, sobald diese einmal aufgebaut sind, das Irreversible als Widerstand gegen die operative Ableitbarkeit versteht." (Piaget 1978, S.84)
Auf der Stufe der konkreten Operationen verwandelt sich dann allmählich diese "vorstellungsmäßige Vorkausalität" in eine "rationale Kausalität". Das Kind assimiliert den Zufall an die Operationen, sobald ihm klar wird, daß das einzelne Ergebnis nicht vorhersagbar ist, daß "aber die Abläufe im Ganzen vorhersehbar sind: der Begriff der Wahrscheinlichkeit wird so Schritt für Schritt als Beziehung zwischen den günstigen Fällen aufgebaut. Doch sein Abschluß setzt eine

Kombinatorik voraus, das heißt eine Struktur, die sich erst mit 11 bis 12 Jahren ausbildet." (Piaget 1978, S. 65)

Im folgenden werde ich die einzelnen Versuche, die Piaget und seine Mitarbeiterin B.Inhelder durchgeführt haben, beschreiben. Die Resultate veröffentlichten die beiden Autoren im Jahre 1951 in der Schrift "La genèse de l'idée du hasard chez l'enfant". Kinder im Alter von 4 bis 13 Jahren waren die Versuchspersonen. An jedem Versuch nahmen 15 bis 20 Kinder teil. Ziel der Untersuchungen war, das Verhalten von Kindern in der präoperativen Phase (1. Stadium: bis ca 7 Jahre), in der Phase der konkreten Operationen (2. Stadium: ca 7 bis 11 Jahre) und in der Phase der formalen Operationen (3. Stadium: ab ca 11 Jahren) zu beobachten, um so über die Entwicklung stochastischer Ideen Auskunft zu bekommen.

2.2.1. Irreversible Vermischung

Eine Schachtel, an deren Rand 8 rote und 8 weiße Perlen liegen - der Farbe nach sortiert und durch ein etwa 2 cm langes Holzbrettchen getrennt- wird ein wenig gekippt, sodaß die Perlen anfangen, zur entgegengesetzten Seite hinzurollen. Aber bevor sie die andere Seite erreicht haben, wird die Schachtel wieder zurückgekippt. Dabei ergibt sich eine Vermischung.
Anschließend werden den Kindern Fragen gestellt:
- Wohin rollen die Perlen wohl, wenn man die Schachtel ganz kippt?
- Wohin rollen die Perlen, wenn man wieder zurückkippt?
- Außerdem sollen sie die vermuteten Bahnen der Perlen zeichnen.
(Piaget/Inhelder 1951, S.14)

1. Stadium :
Kinder dieser Entwicklungsphase sind davon überzeugt, daß die Anordnung unverändert bleibt. Beim Zurückkippen erwarten sie, daß alle Perlen an die ursprüngliche Stelle zurückrollen.
Die Bahnen der Perlen werden entsprechend gezeichnet. Die Kinder dieses Stadiums können sich nur auf einen Zustand konzentrieren, sie sehen nicht die übrigen möglichen Ergebnisse; denn sie sind "noch nicht im Besitz von reversiblen Operationen".(Vgl.S.32)

2. Stadium:
Jetzt wird die zunehmende Vermischung der Perlen erwartet. Aber die Kinder dieser Entwicklungsstufe glauben doch noch, daß eine gewisse vorhersagbare Ordnung waltet: At(9;10)".les rouges vont à la place des blanches et les blanches à la place des rouges. (P/I,S.26) Die Bahnen der Perlen werden noch immer so gezeichnet, als ob sie sich nach einem determinierten Plan bewegten und die Kugeln sich nicht gegenseitig aus einer Bahn werfen könnten.
3. Stadium:
Die Kinder erwarten nicht mehr, daß die Perlen in die Ausgangslage zurückkehren. Es wird zwar für möglich, aber für sehr unwahrscheinlich gehalten.

2.2.2. Zentrierte Verteilungen

Bei diesem sog. Fächerexperiment werden an der oberen Seite von vier Kästen durch eine Öffnung Kugeln gerollt. Die Unterseite ist mit Brettern verschieden eingeteilt. Beim ersten Kasten entstehen so 2 Fächer, beim zweiten 3 Fächer, beim dritten 4 Fächer und beim vierten 16 Fächer. (P/I, S. 37)
Die Kinder sollen angeben, welches Ergebnis sie nach einem Versuch erwarten und wie die Verteilung nach vielen Versuchen aussehen wird.

1. Stadium:
Beim ersten Kasten meinen Kinder dieser Altersstufe häufig, daß eine gerechte Verteilung stattfinden wird. Daher erwarten sie zwar intuitiv eine Gleichverteilung, aber auf die Weise, daß einmal eine Kugel nach rechts (links) rollt und das darauffolgende Mal nach links (rechts) usw. "..chacun à son tour .." (P/I, S.44)

Eine andere Gruppe von Kindern vermutet einen kausalen Zusammenhang. Diese Kinder meinen nämlich, daß die Kugeln die Richtung der ersten nachahmen: rollt die eine nach rechts, dann tut es die nächste wohl auch.
Kein Kind erwartet bei vielen Versuchen eine symmetrische Verteilung.
Zweiter bis vierter Kasten: Die Meinungen zu dem ersten Kasten werden auf die restlichen Kästen verallgemeinert. Nur ganz wenige Kinder vermuten, daß bei den folgenden Kästen im

zentralen Fach mehr Kugeln landen könnten.
2. Stadium:
Jetzt vermuten die Kinder bereits, daß in die seitlichen Fächer der Kästen 2 bis 4 weniger Kugeln rollen werden, aber die Idee des Prinzips der großen Zahlen ist ihnen noch nicht geläufig. Ebenso fehlen noch kombinatorische Schemata und ein elementares Proportionen-Kalkül etwa der Art, daß 3/9 = 2/6.
3. Stadium:
Jetzt können die Kinder alle Möglichkeiten gleichzeitig berücksichtigen, sie können im Piagetschen Vokabular "auf Operationen operieren", d.h. eine "Operation zweiter Mächtigkeit" vollziehen.

2.2.3. Gleichverteilung

Auf kariertes Papier fallen durch ein Sieb kleine Glasperlen. Piaget/Inhelder simulieren auf diese Weise das "Regnen auf Pflastersteine" (Vgl. Polya 1963, S.88)
Die Kinder sollen sowohl über das Fallen einer einzelnen Perle als auch über die gesamte erwartete Verteilung Vermutungen anstellen.

1. Stadium:
Die Kinder erwarten zwar, daß die Perlen überallhin fallen werden, aber nicht zufällig, sondern gerecht verteilt. Joc etwa, auf die Frage, wieviele Perlen man braucht, damit auf jedes Karo eine fällt, zählt die 20 Quadrate nach und antwortet dann, daß er 20 Perlen benötige. (Joc (6;11) S. 56)

2. Stadium:
Jetzt erwarten die Kinder auch Differenzen in der Verteilung, aber Verhältnisse wie etwa 10:80 lehnen sie noch als unmöglich ab. (S.58)
3. Stadium:
Erst hier verfügen die Kinder über sachgerechte Erklärungsstrategien; sie erwarten eine Gleichverteilung.

2.2.4. Zufällige und nicht zufällige Ereignisse

Die Entwicklung des Zufallsbegriffs testen Piaget/Inhelder mit drei verschiedenen Experimenten.

Sie benutzen als Zufallsgeneratoren ein Glücksrad, 15 Spielmarken und schließlich noch einen Beutel mit gleich vielen roten und blauen Kugeln. Im zweiten Durchgang wird jeweils so manipuliert, daß kein Zufallsexperiment mehr vorliegt.
Beim Glücksrad, das in farbige Sektoren eingeteilt ist, wird vor dem zweiten Durchgang ein Magnet auf einem Sektor - für die Kinder unbemerkt - angebracht, sodaß der Metallzeiger stets auf diesen Sektor zeigen muß.
Die 15 Spielmarken, die einen Kreis auf der einen Seite und ein Kreuz auf der Rückseite aufweisen, werden vor dem zweiten Wurf durch Spielmarken mit Kreuzen auf beiden Seiten ersetzt.
Und der Beutel mit den roten und blauen Kugeln wird, wieder ohne Wissen der Kinder, durch einen mit nur blauen Kugeln ersetzt, bevor sie das zweite Mal eine Handvoll ziehen dürfen.

1. Stadium:
Zum Zufallsexperiment:
Beinahe alle Kinder erwarten ein vorhersagbares Einzelergebnis. Viele nehmen an, daß beim Glücksrad nach jedem Drehen der Zeiger auf einen anderen Sektor zeigen wird. Oder sie tippen auf ihre Lieblingsfarbe. Zum Teil übertragen sie auch die Reihenfolge der verschieden farbigen Sektoren des Glückrads auf die Farbfolge im Experiment.
Die Kinder sind also noch ganz den deterministischen Schemata verhaftet.
Zum manipulierten Durchgang:
Die Kinder sind bei keinem der drei Experimente überrascht, wenn z.B. der Zeiger nur noch auf einen Sektor zeigt, nur noch Kreuze auf den Spielmarken zu sehen sind oder immer nur eine Handvoll blaue Kugeln gezogen wird. Chap (5;4) sagt zwar: "C'est drôle!", nachdem erneut nur Kreuze zu sehen sind (S.98), aber keines der Kinder kommt auf die Ursache und nachdem man ihnen erzählt hat, daß etwas verändert wurde, glauben sie trotzdem noch, daß sie z.B. mit den ersten Spielmarken leicht auch ein Ergebnis mit lauter Kreuzen hätten erreichen können. Ein Kind sagt zum zweiten Durchgang des dritten Experiments: "Die roten Kugeln wollen nicht herauskommen".."Die blauen stoßen die roten weg" (Eis (4;7)S. 108)

2. Stadium:
Das Urteil der Kinder wird zunehmend präzisiert. Sie glauben nun nicht mehr an die Vorhersagbarkeit der Einzelergebnisse. Die Manipulationen werden entdeckt; die Kinder können jetzt zwischen zufälligen und determinierten Ereignissen unterscheiden. Eine quantitative Erfassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist aber nur gelegentlich in Ansätzen vorhanden.

3. Stadium:
Jetzt wird das Prinzip der großen Zahlen eingesehen und der Wahrscheinlichkeitsbegriff wird quantitativ erfaßt.

2.2.5. Urnenexperimente (Le tirage au sort des couples)

Bei diesen Experimenten wird die Farb- und Zahlzusammensetzung der "Urnen" (Piaget benutzt Tüten; frz. sacs) jedesmal verändert. Auf dem Versuchstisch bleiben als Erinnerungshilfe die behandelten Mischungen aufgebaut. Die Kinder ziehen eine oder zwei Spielmarken und werden danach aufgefordert, Prognosen für weitere Ziehungen abzugeben.

1. Stadium:
Hier spielt der kindliche Egozentrismus noch eine wesentliche Rolle. Ber (5;1) etwa erwartet rot, "parce que j'aime bien le rouge." (S.114) Sowohl der Zufalls- als auch der Wahrscheinlichkeitsbegriff fehlt noch vollständig. Zufallsurteile werden durch moralische bzw. deterministische ersetzt und die Proportionen in den diversen Urnen werden nicht berücksichtigt.

2. Stadium:
Jetzt berücksichtigen die Kinder die Zusammensetzung der Urnen, allerdings nicht konsequent. Immer wieder werden Überlegungen derart angestellt, daß nach dem Ziehen von zwei roten Marken oder einer roten und einer blauen jetzt das Ziehen von zwei grünen Spielmarken an der Reihe wäre. (Chev(10 Jahre) S. 121) Beim Ziehen ohne Zurücklegen wird noch nicht berücksichtigt, daß bei der Prognose für eine weitere Ziehung die neue Zusammenstellung der Urne bedacht werden muß; der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit fehlt also noch.

3. Stadium:
Jetzt erst wird die Wahrscheinlichkeit der Ziehung von Paaren aus einer Urne mit z.B. 14 grünen, 10 roten, einer blauen und 7 gelben Spielmarken auf die richtige Weise angegangen, indem

nach den möglichen Kombinationen gefragt wird. Es zeigt sich also auch hier, daß kombinatorische Schemata unerläßlich für die Quantifizierung der Wahrscheinlichkeiten sind.

2.2.6. Chancenvergleich

In dieser letzten Versuchsserie werden wieder Spielmarken benutzt. Jetzt ist allerdings die Rückseite unmarkiert. Auf der Vorderseite befinden sich Kreuze oder Kreise. Den Kindern werden bei jedem Versuch zwei Mengen von Spielmarken zur Besichtigung vorgelegt. Danach werden die Häufchen getrennt gemischt und die Marken mit der unmarkierten Seite nach oben gelegt. Die Frage an die Kinder lautet nun immer: Bei welcher Menge ist die Chance größer ein 'Kreuz' zu ziehen?
Die Verteilung ist jedesmal anders:

1. Doppelte Unsicherheit
   In beiden Mengen keine Kreuze
2. Doppelte Sicherheit
   Nur Kreuze
3. Sicherheit - Unmöglichkeit
4. Möglichkeit - Sicherheit
5. Möglichkeit - Unmöglichkeit
6. Identische Zusammensetzung
7. Proportionalität 1/3 und 2/6
8. Ungleichheit der günstigen Fälle
   Gleichheit der möglichen Fälle
   z.B. 1/4 und 2/4
9. Gleichheit der günstigen Fälle
   Ungleichheit der möglichen Fälle
   z.B. 1/2 und 1/3
10. Ungleichheit der günstigen Fälle
    und der möglichen Fälle
    z.B. 1/2 und 2/3 (S. 127f)

1. Stadium:
In der präoperativen Phase fehlen logische Begriffe, um richtig unterscheiden zu können. Fehlt z.B. der Begriff der Disjunktion $A_1 \vee A_2 = A$, dann kann das Kind nicht zwei Fälle in Betracht ziehen. Beispiel (2. Verteilung, d.h. doppelte Sicherheit):
Zu jeder Menge gehören zwei Spielmarken und jede der Spielmarken ist mit einem Kreuz versehen. Auf die Frage, bei welcher Menge

die größere Chance bestehe, ein Kreuz zu ziehen, antwortet Cao (5;3): "Là (à gauche) parce qu'il y en a deux." (S.130) oder ein weiteres Beispiel (4. Verteilung, d.h. Möglichkeit-Sicherheit): In der ersten Menge hat von drei Spielmarken eine ein Kreuz und in der zweiten Menge liegen drei Spielmarken mit Kreuzen: Jea: "Là" (erste Menge), Piaget: "Pourquoi?", Jea: "C'est plus facile quand il y a rien qu'une croix." (Es ist leichter, denn es gibt nur ein Kreuz) (Jea (4;6), S. 129)

Fehlt der Begriff der Inclusion ($A_1 + A_2 = A$), dann kann das Kind noch nicht in der Grundmenge A die Menge der günstigen Fälle gedanklich absondern bzw. danach die Abtrennung wieder rückgängig machen. Es fehlt nach Piaget noch die Reversibilität von Operationen. "Comme nous l'avons déjà constaté antérieurement, l'enfant ne saurait concevoir le hasard, c'est-à-dire l'incomposable et l'irréversible, que par référence aux opérations composables et réversibles. Nous pouvons ajouter maintenant que lorsque de telles opérations font encore défaut, non seulement toute idée de hasard demeure inaccessible, mais encore et a fortiori toute notion de probabilité, puisque de telles notions consistent à inclure à titre de parties dans le tout, les cas favorables dans l'ensemble des cas possibles, composés disjonctivement." (S. 137)

2. Stadium

In diesem Alter sind im allgemeinen die ersten logischen Begriffe vorhanden, sodaß die Kinder bei vielen Aufgaben richtig antworten. Überfordert sind sie noch beim Aufgabentyp 7 und 10 (7: 1/3 und 2/6 bzw. 10: 1/2 und 2/3) Zum Beispiel Mey (11;1) auf Seite 146.

Hier fehlt ihnen das nötige Proportionenkalkül. Allerdings gelingt den Kindern eine Lösung, wenn die Spielmarken günstig angeordnet werden können:

1. Menge	X	O	O		2. Menge	X	O	O
	X	O	O					

Kel (10;2) gelingt die Lösung. (S. 145)

3. Stadium:

Jetzt können die Kinder - wie immer bei Piaget in diesem Stadium- alle Aufgaben richtig lösen.

2.3.7. Kombinatorik

Zur Kombinatorik konstruierten Piaget/Inhelder Aufgaben, in denen die Kinder aus Spielmarken mit 2 - 5 Farben ungeordnete Paare zusammenstellen sollten.

Im ersten Stadium fanden die Kleinen durch unsystematisches Probieren einige Paare. (S. 154)
Im zweiten Stadium beginnen die Kinder systematisch zu suchen und sind dadurch auch viel erfolgreicher. (S. 156f)
Aber erst im dritten Stadium gelingt ihnen eine Verallgemeinerung auf mehr Elemente. (S. 159 f)

Piaget/Inhelder haben in ihren Versuchen aufgezeigt, daß die Begriffe Zufall und Wahrscheinlichkeit sich erst allmählich entwickeln. Bei sehr jungen Kindern existiert noch kein Zufallsbegriff. Zufallsereignisse werden deterministisch oder moralisch beurteilt oder mit zeitlich bzw. räumlich naheliegenden Ereignissen in Zusammenhang gebracht.
Der Zufallsbegriff kann erst aufgebaut werden, wenn das Kind im Besitz von reversiblen Operationen ist. Der Zufall wird zwar anfangs als "Hindernis gegen die (operative) Ableitbarkeit aufgefaßt" aber im Laufe der Entwicklung "an die Operationen assimiliert" (Piaget/Inhelder 1978, S. 84).
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff entwickelt sich nach dem Zufallsbegriff. Die Untersuchungen haben gezeigt, daß für die Entwicklung eines quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriffs Grundbegriffe der Kombinatorik und ein elementares Proportionenkalkül erforderlich sind.

2.3. Neuere Untersuchungen

An Piagets Untersuchungen ist von einigen Forschern im Laufe der Zeit Kritik geübt worden. Viele seiner Ergebnisse wurden deshalb überprüft. Kritisiert wurde die reine Interviewtechnik der Untersuchungen mit immer wieder auftretenden Suggestivfragen, ebenso die kleinen Stichproben, die keine Verallgemeinerung zulassen und die fehlende Berücksichtigung von Variablen wie Intelligenz, Geschlecht, Farbevorzugungen, Schichtzugehörigkeit usw.
Bei den Überprüfungs-Experimenten wurde die Untersuchungstechnik neueren Erkenntnissen angepaßt; z.B. Kontrollgruppen gebildet und die Ergebnisse mit Signifikanztests abgesichert.

Yost/Siegel/Andrews unterzogen 1962 zwanzig Kinder im Alter von 4;10 bis 5;o zwei Urnenexperimenten. Einmal mit der Piagetschen Versuchsanordnung und dann mit einer neu konstruierten, die sie "decisions-making-technique" nennen. (S. 779)
Die neue Versuchsanordnung führte zu signifikant günstigeren Ergebnissen. Die Kinder diesen Alters äußerten durchaus treffende Wahrscheinlichkeitsvoraussagen.
Die unterschiedlichen Versuchsanordnungen werden von Yost u.a. so skizziert:

" modified Piaget method	decisions-making-technique
one box	two boxes
color choice	container choice
no control for color	control for color
preference	preference
no reinforcement other than knowledge of outcome	reinforcement "

C.M. Davies testete 1965 112 Kinder zwischen 3 und 9 Jahren mit einer ähnlichen Versuchsanordnung wie Yost u.a.
Auch sie kommt zu dem Ergebnis, daß Kinder ab 6 Jahren eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeit haben, allerdings eine nicht-verbale Vorstellung.
Leffin (1971) entdeckt signifikante Zusammenhänge von Intelligenz und stochastischer Entwicklung.
Cohen (1957) wiederum bestätigt viele Ergebnisse von Piaget/Inhelder. Etwa die Idee des "gerechten Zufalls" bei kleinen Kindern.
Fischbein/Pampu/Minzat (1967) stellen fest, daß 6-jährige Kinder schon sehr gut Unsicherheit und Sicherheit bei Ereignissen unterscheiden können.

Insgesamt hat sich gezeigt, daß die Piagetschen Untersuchungsergebnisse zum großen Teil als gesichert gelten dürfen.
Die Begriffe des Zufalls und der Wahrscheinlichkeit entwickeln sich erst allmählich, der Zufallsbegriff vor dem der Wahrscheinlichkeit.
Der Besitz von kombinatorischen Fähigkeiten und ein erstes Verständnis für das Proportionenkalkül sind für die volle Entfaltung beider Begriffe unerläßlich. Die neueren Untersuchungen mit nonverbalen Versuchstechniken und der Einleitung eines gelenkten Lernprozesses haben zusätzlich gezeigt, daß auch jüngere Kinder Zugang zu beiden Begriffen bekommen können.

3. Pädagogischer Aspekt

Im ersten Abschnitt habe ich die fundamentalen Ideen der Stochastik aufgezählt, d.h. ich habe gezeigt, daß man den Inhalt Stochastik für die Schule elementarisieren kann und ich habe erläutert, daß der intuitive Umgang mit stochastischen Inhalten häufig fehlerhaft ist, daß aber die Wissenschaft auf richtige Intuitionen aufbauen muß.
Im zweiten Abschnitt habe ich anhand der Untersuchungen zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs von Piaget/Inhelder und jüngeren Forschern zeigen können, daß Kinder unbestritten ab ca. 11 Jahren, unter Umständen auch früher, einen voll entwickelten Wahrscheinlichkeitsbegriff besitzen bzw. durch einen Lernprozeß erwerben können.
Meine nächste Frage ist nun, warum Schüler vom erzieherischen Standpunkt aus in Stochastik ausgebildet werden sollen, d.h. ob ich die Konstruktion eines Teilcurriculums in Stochastik für die 5. und 6. Jahrgangsstufe pädagogisch begründen kann.

3.1. Zur Begründungsproblematik

Es ist in unserer pluralistischen Gesellschaft eine offene Frage, welche Lernprozesse, wofür und wie sie veranstaltet werden sollen. Diese Problematik tritt immer dann deutlich hervor, wenn überlieferte Normen bezweifelt und nicht mehr ohne weiteres akzeptiert werden. Es ist für uns nicht selbstverständlich, welche Quellen uns Gründe und Rechtfertigungsargumente für die Legitimation von Zielen und Inhalten liefern sollen.
Die allgemeine Didaktik und die Curriculumtheorie haben in der letzten Zeit das Begründungsproblem verstärkt thematisiert. R. Künzli (1975) unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen Begründung, Rechtfertigung und Legitimation. Unter Verwendung der Begriffe Ziel und Zweck argumentiert er so: "Zwecke bedürfen der Begründung, das ist der Nachweis, daß die Mittel die unterstellte Zweckmäßigkeit besitzen, daß sie den gesteckten Zielen entsprechen. Die Ziele selbst bedürfen der Rechtfertigung als zu Recht gefordert, will hier heißen 'vernünftige'. Begründung ist eine theoretische Frage, sie ist auf Zweck-Mittel-Relationen gerichtet. Rechtfertigung ist eine praktische oder

moralische Frage, sie ist auf die Ziele gerichtet." (S.13f) Künzli betont, daß es bei dieser Differenzierung nicht um das Auseinanderhalten unterschiedlicher Gegenstände geht, sondern allein um das Auseinanderhalten zweier Betrachtungsweisen. So kann über Ziele "sinnvoll" reflektiert werden ohne gleichzeitig Handlungszusammenhänge berücksichtigen zu müssen. "Als solch sinnvolles Reden über Ziele betrachte ich z.B. die Utopie, deren kritische Funktion im Aufweis des 'anderen' gerade darin besteht, daß sie sich nicht an das 'Machbare' hält, ohne doch ihre praxisklärende Bedeutung zu verlieren." (ebd.) Künzli schlägt vor, von theoretischen Begründungen dann zu sprechen, "wenn z.B. ein neuer Inhalt angeboten werden soll und abzuklären ist, ob überhaupt und wie Schüler in der Lage sind, diesen Stoff zu verarbeiten. Etliche Wissenschaften können zur Klärung solcher Fragen herangezogen werden."(ebd.)

Konkurrieren nun einige durchaus gleich gut begründbare Ansprüche miteinander, weil aus irgendwelchen Gründen, seien sie zeitlicher, räumlicher oder auch finanzieller Art, eine Reihenfolge der Realisierung eingehalten werden muß, dann lassen sich die gefällten Entscheidungen nicht mehr theoretisch begründen. "Sie müssen praktisch gerechtfertigt werden durch Angabe von Gründen, die sich auf moralische Handlungs- und Bewertungsnormen beziehen." (ebd.) Diese Art der Argumentation nennt Künzli dann "praktische Rechtfertigung"."Sie stellt ein Verfahren der rationalen Bereinigung von Interessenkollisionen durch Interessenkritik dar." Legitimiert wird ein neuer Inhalt schließlich, indem er politisch verbindlich gemacht wird.

In dieser Arbeit wird zu dem neuen Inhalt -Stochastik für 10-12jährige Schüler- eine theoretische Begründung im obigen Sinne versucht, wobei die Frage, warum diese Schüler gerade diesen Inhalt lernen sollen zur Begründung gezählt wird. Die Rechtfertigung dieses Inhalts gegenüber einem anderen, der u.U. weichen muß und schließlich die politische Legitimation müssen anderen Instanzen vorbehalten bleiben. "Die Zieldiskussion, auch die über Teilziele von größerer Allgemeinheit (z.B. Lehrplanfragen, schulische Führungsprobleme, Fragen der Bildungsorganisation) müssen öffentlich geführt und

Entscheidungen öffentlich legitimiert werden: in den Medien, in parlamentarischen Debatten, in politischen Versammlungen etc. Allgemeine Zielfragen sind keine Probleme nur für Experten, die keiner öffentlichen Kontrolle unterliegen; die Antworten können nicht ohne die Betroffenen gegeben werden (nach Maßgabe ihrer bereits erworbenen Entscheidungsfähigkeit)."(Schiefele 1974, S.117)

Die Resultate der Erprobung dieses Curriculums sollen aber für die weitere Diskussion durchaus eine Grundlage bilden.

3.2. Begründung der Auswahl des neuen Inhalts

Ein häufig verwendeter Begriff in der Begründungsdiskussion ist der Terminus 'Qualifikation'. In der deutschen Curriculumtheorie basieren die meisten Beiträge zur Qualifikationsfrage auf dem Modell von S.B.Robinsohn. Er geht aus von dem Auftrag der Schule, Jugendliche für die Bewältigung von Lebenssituationen entsprechend auszustatten. Die Curriculumforschung hat demzufolge die Aufgabe, "Methoden zu finden und anzuwenden, durch welche diese Situationen und die in ihnen geforderten Funktionen, die zu deren Bewältigung notwendigen Qualifikationen und die Bildungsinhalte und Gegenstände, durch welche diese Qualifizierung bewirkt werden soll, in optimaler Objektivierung identifiziert werden können." (Robinsohn 1967, S. 45) Robinsohn schlägt drei Kriterien für die Auswahl von Inhalten vor:
Erstens "die Bedeutung eines Gegenstandes im Gefüge der Wissenschaft", zweitens "die Funktion des Gegenstandes in spezifischen Verwendungssituationen des privaten und öffentlichen Lebens" und drittens "die Leistung eines Gegenstandes für Weltverstehen ..." (S. 47) Auf die Kritik hin, daß Robinsohn die Frage nach bestimmten ethischen oder politischen Normen vermieden habe, erläuterte sein Mitarbeiter J.Zimmer den Begriff der Qualifikation wie folgt: "Qualifikationen sind Verhaltensdispositionen, die ein Schüler erwerben sollte, wenn er sich in den gesellschaftlichen Situationen adäquat, d.h. möglichst kompetent und autonom verhalten will." (Zimmer 1971, S. 190)
Im folgenden werde ich nun die unter Punkt 1 vorgestellten elementaren Strukturen des Inhalts Stochastik mit Verhaltensdispositionen in Beziehung setzen, die m.E. für den Jugendlichen heute und in Zukunft wichtig sein werden. Die Robinsohnschen Kriterien sollen mir dabei als Gerüst dienen.

3.2.1. Stochastik und ihre Bedeutung im Gefüge der Wissenschaft

"Die Statistik ist zur charakteristischen Methode des modernen Wissenschaftsbetriebes geworden." (Menges 1966, S. 16)
Die Bedeutung dieses Gegenstandes im Gefüge der Wissenschaft - nicht nur der Mathematik - ist unbestritten und grundlegend. Stochastik ist als "Voraussetzung für weiteres Studium und weitere Ausbildung" (Robinsohn 1967, S. 47) unerläßlich, denn " in vielen Staatsexamensarbeiten und Hochschulprüfungen aller Fachbereiche werden heute statistische Auswertungen gefordert... Ein befriedigendes Beherrschen statistischer Methoden ist u.U. nur dadurch zu erreichen, daß ihre Behandlung bereits im Unterricht der Gymnasien in ausreichendem Maße erfolgt." (Gall 1971, S. 67)
Stochastik muß ebenso als mathematische Grundlage für technisches und naturwissenschaftliches Verständnis angesehen werden. Sie hilft bei der Anpassung von Modellen an die Wirklichkeit und ermöglicht die Mathematisierung realer Situationen. Für diesen Prozeß der Aufprägung stochastischer Modelle sind alle fundamentalen Ideen von Bedeutung. "Würde Stochastik ... vom Schulstoff ausgeklammert, dann blieben wesentliche Aspekte unserer Wirklichkeit unverständlich, die verständlich gemacht werden könnten. Darüber hinaus entstünde ein unvollständiges Bild von der Mathematik und der Kraft ihrer Methoden." (Winter 1976, S. 22)
Ich möchte noch hinzufügen, daß ebenso eine Besinnung auf die Grenzen der Mathematik mit eingeschlossen werden muß. Dieser Gesichtspunkt überschneidet sich aber bereits mit den beiden anderen Kriterien, die sich auf Gesellschaft und Kultur beziehen und auf die Stellung des Schülers und zukünftigen Erwachsenen darin.
Zusammenfassend kann man Stochastik sicherlich als einen Inhalt bezeichnen, der hinsichtlich des ersten Kriteriums als Unterrichtsgegenstand begründbar ist.

3.2.2. Das Erziehungsziel Selbständigkeit und Stochastik

Bevor ich das zweite und dritte Kriterium von Robinsohn mit den fundamentalen Strukturen der Stochastik in Beziehung setze, werde ich das Erziehungsziel Selbständigkeit beleuchten, da es für beide Kriterien von elementarer Bedeutung ist.

Selbständigkeit ist unbestritten ein menschlicher Grundwert und jede Erziehung hat Selbständigkeit mehr oder weniger zum Ziel, sodaß man hier sicherlich von einer grundlegenden und erstrebenswerten Qualifikation in obigem Sinne sprechen kann. Der Wert der Selbständigkeit besitzt eine enge Affinität zum Wert der Freiheit und er beinhaltet wie jener Grenzen individueller Entfaltung hinsichtlich der Verantwortlichkeit für den anderen und die gesamt Umwelt. "Schließlich .. ist das Leben auch eines selbständigen Menschen eben sozial verfaßt, und das bedeutet vor allem Abhängigkeit und Angewiesenheit durch die unumgängliche Aufgabenverteilung." (Müller, A. 1978, S. 182f) Mit dem Erziehungsziel Selbständigkeit ist nun nicht nur gemeint, daß der Zögling im Laufe seiner Entwicklung soweit kommt, daß er seinen Lebensunterhalt selbst betreiben kann, sondern daß er auch eigene Auffassungen gewinnt und vertreten lernt und eigene Ziele verfolgt."In diesen Hinsichten einigermaßen selbständig zu sein, ist durchaus eine Bedingung für die Bewältigung der Anforderungen, die ein normales Leben stellt. Denken, Urteilen, Entscheiden sind vielfältig und unentbehrlich in unsere übrigen ("äußeren") Lebensfunktionen hineinverwoben. Denkendes und planendes Verhalten ist charakteristisch für das Lebewesen Mensch; also wird ohne ein Minimum an intellektiv-voluntativer Selbständigkeit sein Verhalten nicht selbständig sein können." (Müller 1978, S.184) Im Laufe der Erziehung soll der Zögling immer mehr Selbständigkeit erreichen. Auf intellektuellem Gebiet vollzieht sich diese Entwicklung, indem er immer mehr Begriffe parat hat, die kritisches, selbständiges Denken erst ermöglichen. "Selbständigkeit der Meinung, das heißt, eines bestimmten Umgangs mit Begriffen, auch und gerade in Bereichen komplexer Zusammenhänge, ist erst möglich, wenn die korrekte Verwendung der entsprechenden Ausdrücke erlernt ist." (ebd. S. 195)

Die fundamentalen stochastischen Ideen, die ich im ersten Abschnitt angeführt habe, sind nun Begriffe, die man erlernt haben muß, um in stochastischen Situationen selbständig d.h. auch kritisch denken zu können. Unter 1.4. habe ich sieben fundamentale Fehler beschrieben, die beinahe alle im täglichen Leben immer wieder passieren und die möglichst vermieden werden sollten. Vor allem der sechste Fehler - Stichproben werden leichtfertig als zufällig, d.h. repräsentativ angenommen und falsche

Schlüsse daraus gezogen -(Vgl. S.26) ist so gravierend und behindert so außerordentlich die Kritikfähigkeit - man denke nur an die verhängnisvollen Folgen von Vorurteilen -, daß hier ganz klar zutage tritt, wie wichtig gerade die Kenntnis der fundamentalen stochastischen Begriffe für die Qualifikation Selbständigkeit ist.

3.2.3. Die Funktion des Inhalts -Stochastik- in spezifischen Verwendungssituationen des privaten und öffentlichen Lebens

Im folgenden werde ich Argumente für Stochastikunterricht sammeln im Hinblick auf die Lebensbereiche Schule, Beruf, Familie und Freizeit.

3.2.3.1. Lebensbereich Schule

Im Bereich der Schule muß man m.E. das Fach Mathematik selbst betrachten und untersuchen, ob grundsätzliche Verträglichkeit mit den allgemeinen Zielen dieses Faches zu konstatieren ist. Des weiteren ist es angezeigt, nach Verbindungsmöglichkeiten mit dem gesamten Fächerkanon zu fragen.

Lenné (1969) beschreibt Ziele des Mathematikunterrichts durch Qualifikationen im Robinsohnschen Sinne. Er unterscheidet spezielle, stark fachorientierte, verhaltensbezogene bzw. inhaltsbezogene allgemeine Qualifikationen und allgemeinste Zielsetzungen. (Kapitel II)
Die von H.Winter (1972) aufgeführten allgemeinen Lernziele beziehen sich ebenfalls sowohl auf fundamentale menschliche Verhaltensweisen als auch auf die charakteristische Stoffstruktur der Mathematik:

Allgemeine Haltungen und Fähigkeiten:

1. Der Schüler soll lernen zu argumentieren
2. Der Schüler soll lernen, sich kreativ zu verhalten
3. Der Schüler soll lernen, Situationen zu mathematisieren.

Geistige Grundtechniken:

4. Klassifizieren
5. Ordnen
6. Generalisieren
7. Analogisieren
8. Formalisieren.

Den bisher differenziertesten Katalog stellte L.Bauer (1978) auf. Er unterscheidet zwischen allgemeinen mathematischen Prozessen und Produkten: (S. 471)

Allgemeine mathematische Prozesse	Allgemeine mathematische Produkte
Analysieren; Fallunterscheidungen treffen	einzelne Teile; einzelne Fälle
Synthetisieren; verschiedene Fälle zu einem Ganzen zusammenfassen	aus Teilen zusammengesetztes Ganzes
Abstrahieren	
1. intensionales Abstrahieren	Intension von Begriffen
2. extensionales Abstrahieren	Extension von Begriffen
Konkretisieren	Beispiele
Klassifizieren	
1. intensionales Klassifizieren	Klassen
2. extensionales Klassifizieren	Klasseneinteilung
Generalisieren	Allgemeinfall
Spezialisieren	Spezialfall
Kombinieren	Kombination
Ornen, Systematisieren, Strukturieren	Ordnung, System Struktur
1. Beziehungen herstellen	Beziehung, Zusammenhang
2. lokales Ordnen	geordneter Teilbereich
3. globales Ordnen, insbesondere Axiomatisieren	geordneter Gesamtbereich Axiomensystem
Definieren	Definition
Schließen	Schluß
1. Prämisse finden	Prämisse, Voraussetzung, hinreichendes Kriterium
2. Konklusion finden	Konklusion, Folgerung notwendiges Kriterium
Beweisen, Begründen	Beweis, Grund
Experimentieren	Experiment, Versuch
Umstrukturieren	Umstrukturierung,Transformation
Plausibles Schließen	Plausibler Schluß
1. Analogisieren	
2. Induzieren	
3. Anschauliches Schließen	
Strategie entwerfen	Strategie
Verfahren benutzen	Algorithmen, Verfahren
Mathematisieren	mathematisches Modell
Repräsentieren	Repräsentationsform,Darstellung
1.Enaktivieren 2.Ikonisieren	Handlung; Bild, Zeichnung
3.Verbalisieren 4.Formalisieren	Umgangssprache;mathematische Spr.

Neben den "rein fachinternen Gesichtspunkten" wird bei Bauer auch die "allgemein-kognitive, nicht fachbezogene Dimension mathematischer Denkfähigkeiten" (S.44) erörtert. Zur Beschreibung der "psychologischen Komponente" verwendet Bauer die Denkoperationen des Guilfordschen Intelligenzmodells, nämlich cognition, memory, divergent production, convergent production und evaluation. (S.53f) "Mathematische Denkvorgänge werden in dieser Arbeit sowohl nach psychologischen als auch nach mathematischen Gesichtspunkten klassifiziert. Die Klassifikation nach mathematischen fachbezogenen Kriterien gibt Aufschluß über die betreffenden mathematischen Prozesse und Produkte. Durch die Klassifikation nach psychologischen nichtfachbezogenen Kriterien wird die Art der Denkoperationen .. charakterisiert." (S.51)

Untersucht man nun die fundamentalen Ideen, Probleme und Verfahren der Stochastik mit der Klassifikation von Bauer, so kann man schon nach einer kurzen Betrachtung vermuten, daß viele der Fähigkeiten mit dem Inhalt Stochastik gelernt und geübt werden können. In der 5. und 6. Jahrgangsstufe muß man wohl nur den streng mathematischen Beweis ausklammern, alle anderen Kriterien können sicher bei der Konstruktion des Curriculum in Ansätzen intendiert werden.

Querverbindungen gibt es zu sehr vielen Fächern. Die engsten zur Physik (z.B. die Gasgesetze als stochastische Gesetze, der radioaktive Zerfall usw.) und zur Biologie (z.B. die Mendelschen Vererbungsgesetze). Aber auch in den sozialwissenschaftlichen und geisteswissenschaftlichen Fächern werden Daten erhoben und ausgewertet, Inhaltsanalysen erläutert und vieles mehr. "Eine wichtige Begründung für die Aufnahme der Stochastik in die Schule weist daher auf die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung besonders naheliegenden Transfermöglichkeiten auf Probleme aus der natürlichen, technischen, ökonomischen und politischen Umwelt hin." (Bruhn, 1974,S.165)

3.2.3.2. Die Lebensbereiche Beruf, Familie und Freizeit

Unter 3.2.1. habe ich bereits gezeigt, daß in beinahe allen Wissenschaften stochastische Verfahren zur Anwendung kommen. Mit Hilfe der Studienordnungen, die Stochastikkurse beinhalten, kann man auf die zumindest für möglich gehaltene spätere Verwendung in Berufen mit akademischer Ausbildung schließen. Das ist bei den Studienordnungen der Sozialwissenschaften, der Betriebswissenschaften und der Naturwissenschaften auch der Fall.
Es gibt wenige empirische Untersuchungen, die sich damit auseinandergesetzt haben, wieweit stochastische Elemente in der Arbeitswelt festzustellen sind. R.W. Scholz (1980) berichtet von zwei beruflichen Fallstudien. Die erste untersucht den Medizinerberuf am Beispiel einer Epilepsietherapie und kommt zu dem Ergebnis, daß in diesem Fall vier "Quellen stochastischer Information für das ärztliche Handeln von Bedeutung" sind. (S. 299)
Die zweite Fallstudie beschäftigt sich mit dem Beruf des Bankkaufmanns. "Eine Serie von fünf Interviews mit Geschäftsstellenleitern von Bankinstituten, welche eine Bearbeitung eines Kreditfalls einschlossen, ergab zumindest für die Tätigkeit Kreditvergaben, tägliche Bearbeitung von Überziehungslisten und Erstellung von Geschäftsberichten, daß ein Abschätzen von Entwicklungen wie auch die Quantifizierung und schrittweise systematische Aufklärung von Schwankungen bzw. Trends relevanter Geschäftsgrößen zur beruflichen Tätigkeit gehören." (S.300)
Seit 1977 wird im Rahmen des Kooperationsvertrags zwischen der Arbeitskammer des Saarlandes und der Pädagogischen Hochschule des Saarlandes das Projekt "Die Arbeitswelt als Curriculumfaktor für den Mathematikunterricht der Hauptschule, exemplarisch untersucht am Beispiel der Stochastik" durchgeführt. Es ist geplant, die 20 häufigst gewählten Ausbildungsberufe in den nächsten Jahren entsprechend zu analysieren.

Eine Voruntersuchung an 5 Ausbildungsberufen wurde bereits abgeschlossen. (Die Berufsarten bleiben im Bericht von Jäger 1979 ungenannt) Die Ergebnisse der Untersuchung beschreibt Jäger so: "Stochastische Komponenten treten auf: in der direkten Anwendung (elementare Techniken der beschreibenden Statistik), in Form von Erfahrungswerten, die z.B. das Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten erlauben und in für das Hintergrundwissen relevanten Bereichen. Darüberhinaus werden fast alle Arbeitnehmer mit Betriebsstatistiken konfrontiert. In der Reihenfolge ihres Auftretens ergaben sich folgende stochastische Grundtätigkeiten:

Ziehen von Schlüssen aus stochastischen Informationen
Schätzen von Wahrscheinlichkeiten
Lesen von Tabellen, Listen und Diagrammen
Vergleich von Verteilungen
Ausfüllen von Tabellen und Listen
Sammeln von Daten
Berechnen von Mittel- und Streuwerten
Ermitteln von Häufigkeiten." (S.180)

Und an anderer Stelle bemerkt Jäger: "Eine Reihe von in der Voruntersuchung gewonnenen Indizien spricht dafür, daß hier ein echter Nachholbedarf in der schulischen Ausbildung besteht." (S.181)
Obgleich die Untersuchungen noch nicht abgeschlossen sind, kann man nach den bisherigen Ergebnissen doch schon sagen, daß auch in Berufen, die von Hauptschülern angestrebt werden, stochastische Kenntnisse und Fähigkeiten benötigt werden.

In jeder Familie wird durch das Verhalten der Eltern und nächsten Verwandten für die heranwachsenden Kinder der Grundstein für ihr eigenes Verhalten gelegt, so auch für das Verhalten gegenüber indeterministischen Situationen. Man denke nur an das weitverbreitete Lottospielen und den ebenso verbreiteten Fehler der Aberkennung der Gleichwahrscheinlichkeit der möglichen Ergebnisse (Vgl. auch Item 10 des Tests) und die Unkenntnis der minimalen Gewinnchancen, sowie die Aberkennung der Unabhängigkeit jedes neuen Spiels.
Die Manipulierbarkeit so vieler Menschen hat auch etwas mit mangelnden stochastischen Kenntnissen zu tun. "Vor allem mit Behauptungen über die Qualität von Erzeugnissen, über die Wirk-

samkeit von Mitteln und Maßnahmen, über die 'Richtigkeit' von Programmen usw., werden wir überschüttet, deren tatsächliche 'Richtigkeit' nur mit einem gewissen Mindestmaß stochastischer Bildung beurteilt werden kann." (Winter 1976, S.23)
Ich denke hier an Werbung, an Parteipropaganda, kurz an alle Beeinflussungen, die sich in irgendeiner Weise - nicht nur explizit - auf Daten berufen.

3.2.4. Die Leistung des Inhalts Stochastik für Weltverstehen

Nach all diesen Überlegungen kann man m.E. mit Fug und Recht sagen, daß fundamentale Kenntnisse in Stochastik zu den Kulturtechniken in unserer Zeit gezählt werden müssen, ansonsten bestünde die "Gefahr einer Desorientierung,...einer unproduktiven Verquickung von Phantasie und Wirklichkeit.." (Robinsohn 1967, S. 17) für den heutigen und zukünftigen Menschen. "Daher muß jeder Gebildete ausreichende Grundkenntnisse auf den Gebieten Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik besitzen" (Engel 1966, S. 5)
Indeterministische Vorgänge, die einem Unkundigen Angst bereiten würden, wie etwa wirtschaftliche Entwicklungen, politisches Reagieren von Völkern bzw. Bevölkerungsgruppen "werden beschreibbar und wenigstens teilweise modellierbar. Statistische Gesetzmäßigkeiten können formuliert werden, damit werden Zufallsvorgänge in bestimmter Weise vorhersagbar und damit 'beherrschbar'." (Winter 1976, S. 22)
Damit nun eine adäquate Weltinterpretation entwickelt werden kann, muß eine Sensibilisierung für stochastische Denkweisen angestrebt werden. In der Literatur wird vielfach von dem Ziel: "stochastisch denken lernen" gesprochen. "Wahrscheinlichkeit und Statistik sind nicht nur Kapitel der Mathematik, sondern auch eine Art zu denken, welche die rein deterministische Art ergänzt." (Fischbein/Pampu/Monzat 1978, S. 158)

An dieser Stelle möchte ich für möglichst frühzeitigen Stochastikunterricht plädieren; denn sicherlich ist es schwer oder sogar unmöglich, erst als erwachsener Schüler, Auszubildender bzw. Student seine bereits erworbenen kognitiven Ordnungen in Richtung eines indeterministischen Erklärungsmodells umzustruktu-

rieren. "Für die meisten älteren Schüler oder Erwachsenen ist es geradezu ein Schock, die Existenz eines mathematischen Bereiches zu entdecken, der auf dem Begriff 'vielleicht' basiert." (Glaymann/Varga 1975, S. 7)

"Aus diesem Grunde müssen die in diesem Hinblick wesentlichen geistigen Prozesse frühzeitig, Schritt für Schritt, immer den großen Etappen der geistigen Entwicklung folgend, durch, den einzelnen Stadien angemessene, didaktische Mittel geformt werden." (Fischbein u.a. 1978, S. 158)

Man müßte also schon im Fragealter darauf achten, daß nicht auf jede Warumfrage eine deterministische Scheinbegründung von seiten der Eltern und Erzieher gegeben wird. (Vgl. Heitele 1976, S. 184)

In den folgenden Entwicklungsphasen müssen dann mit Hilfe des Unterrichts - und eben so frühzeitig wie vom entwicklungspsychologischen Standpunkt aus vertretbar - die intuitiven Strukturen bezüglich deterministischer und indeterministischer Situationen aufgebaut werden, bis schließlich eine systematische, axiomatische Behandlung einsetzen kann.

"Ein umfangreiches und wichtiges Stoffgebiet muß auf der Schule mehrmals durchgenommen werden, wobei bei jedem Durchgang Tiefe und Strenge zunehmen. Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist dafür besonders gut geeignet. Sie ist einfacher, vielseitiger und für den Schüler viel interessanter als andere Gebiete des Schulstoffes. Sie zerfällt ganz natürlich in Abschnitte aufsteigenden Schwierigkeitsgrades .. Sie läßt sich mühelos und fast ohne Zeitverlust in den laufenden Unterricht einschmelzen...Auf der Unterstufe betreibt man propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie.. Die intuitive Einführung darf nicht falsch oder irreführend sein, sondern nur unvollständig strukturiert..." (Engel 1966, S. 5)

4. Die Konstruktion des Teilcurriculum -Stochastik in der 5. und 6. Jahrgangsstufe

Wie kann nun der mit Hilfe fundamentaler Ideen der Stochastik elementarisierte Gegenstand, dessen lern- und entwicklungspsychologische Angemessenheit aufgezeigt wurde und der sich als begründbar im Sinne einer Qualifikation für selbständige Lebensbewältigung erwiesen hat, wie kann also dieser Gegenstand unterrichtet werden, d.h. wie muß ein möglichst optimaler Lehrgang konzipiert sein?
Um diese Frage beantworten zu können, werde ich auch die Problematik der Integrierbarkeit in das bestehende Curriculum und die Fortsetzbarkeit bis zur Oberstufe mitbedenken müssen.

Vorher möchte ich aber noch die Entwicklung des Stochastikunterrichts seit 1900 kurz skizzieren, des weiteren bereits entwickelte Lehrgänge für die 5. und 6. Klasse und deren evtl. Evaluation untersuchen und schließlich Stochastikinhalte in den geltenden Lehrplänen der Bundesländer aufzeigen.
Nach dem Studium dieser drei Punkte und der Einbeziehung der Aspekte der Integrierbarkeit und Fortsetzbarkeit habe ich dann m.E. alle nötige Vorarbeit geleistet, um schließlich an die Konstruktion des Teilcurriculum gehen zu können.

4.1. Stochastik im Unterricht

4.1.1. Geschichtlicher Rückblick

Bis 1918 ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik im gymnasialen Oberstufen-Mathematikunterricht vertreten. Es wird Kombinatorik unterrichtet und im Anschluß Wahrscheinlichkeitsrechnung. Obgleich bei Lietzmann (1923,S. 251f) die Kombinatorik als "ein abgestorbener Zweig der Mathematik" bezeichnet wird, begründet der Autor das Verbleiben dieses Inhalts mit der "logischen Schulung, ohne eine parallele geometrische Anschauung, aber doch immer mit der Möglichkeit der rechnerischen Nachprüfung."
Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Laplacesche Definition vorgeschlagen, sowie die Sätze über die Summe und das Produkt von Wahrscheinlichkeiten. "Mit diesen Gesetzen ist der

wissenschaftliche Apparat der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule im allgemeinen erschöpft." Lietzmann schlägt vor, als Anwendungsbereiche die "Physik, Biologie und vor allem Versicherungsmathematik" (S.256) auszuwählen.
Zwischen den beiden Weltkriegen sind die Inhalte Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung in den verbindlichen Lehrplänen nicht mehr zu finden. Vermutlich hängt diese Tatsache mit den wissenschaftstheoretischen Problemen und Kontroversen über den Wahrscheinlichkeitsbegriff in jener Zeit zusammen. (Vgl. Abschnitt 1.2.)
Die nationalsozialistische Unterrichtsreform im Jahre 1937 ist dann vor allem technisch orientiert und betont den Unterricht in Statistik.
1945 wendet man sich in Deutschland verständlicherweise gegen die Überbetonung dieses Utilitaritätsprinzips. "Fortan soll nur noch reine Mathematik betrieben werden " (Stender 1955, S. 271), und verbannt alle stochastischen Inhalte aus den Mathematiklehrplänen.
Da im Ausland, vor allem in den anglo-amerikanischen Ländern, ohne Unterbrechung stochastische Inhalte im Mathematikunterricht ihren festen Platz hatten und nun wieder Kontakte mit diesen Ländern bestanden, begann Mitte der 50er Jahre in Deutschland die Diskussion über eine eventuelle Wiedereinführung, vornehmlich für die Oberstufe der Gymnasien. Der Artikel von R.Stender "Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Schule" im Jahre 1955 eröffnete diese Diskussion. Stender nennt hier sieben Aspekte dieses Inhalts, die seine Behandlung im Unterricht wünschenswert machen. Neben der Einsicht in den Prozeß der "Läuterung eines Begriffs beim Übergang von der Alltagssprache zur exakt wissenschaftlichen Ausdrucksweise" und der Möglichkeit mit Hilfe der Kombinatorik "Strukturuntersuchungen, die unabhängig von ihrer anschaulichen Interpretation sind" vorzunehmen, kann auch drittens "die vollständige Induktion" geübt werden. Viertens ist "besonders wesentlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Übergang vom Diskontinuum zum Kontinuum. Solche Übergänge spielen in der modernen Mathematik eine große Rolle." Fünftens und sechstens kann der Schüler "einen Einblick in den Aufbau des heutigen naturwissenschaftlichen Weltbildes" und "die erkenntnistheoretische Problematik der modernen Physik" gewinnen.

Bei der Formulierung des siebenten Aspekts merkt man noch sehr deutlich die Reaktion auf das NS-Regime: "Natürlich darf die Bedeutung der mathematischen Statistik als Hilfsmittel in anderen Wissenschaften und in der Praxis keineswegs unterschätzt werden. Es liegt aber nicht im Aufgabenbereich der höheren Schule, diesen Nutzen für das praktische Leben durch besonders vielseitiges Eingehen auf Anwendungen hervorzuheben. Hier ist eben in der vergangenen Zeit des Guten zuviel getan worden." (S. 271f)
Im Beschluß der Kultusminister-Konferenz vom 23.3.1956 werden erstmals für die Oberstufe der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasien in Langform Grundbegriffe der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung als Wahlinhalte angegeben, ohne daß allerdings diese Inhaltsangabe näher erläutert würde.

Die CEEC/OECD-Tagungen, 1959 in Royamont/Paris, 1960 in Dubrovnik und 1963 in Athen, beeinflußten die Modernisierung des Mathematikunterrichts in der BRD nachhaltig und in der mathematikdidaktischen Literatur wurde nun auch die Behandlung der Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik im Unterricht vermehrt erörtert. Zum Beispiel widmete die Zeitschrift "Der Mathematikunterricht" die Hefte 3/60, 1/62 und 4/66 allein dem Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Im Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968 wird dagegen Stochastik nur als fünfter wahlfreier Themenkreis genannt und auch in den "Nürnberger Lehrplänen" des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts vom Jahre 1965 ist der Inhalt Stochastik lediglich den mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasien bzw. den Wahlkursen zugeordnet.
Erst im Jahre 1975 hat sich schließlich der Stochastikunterricht in der Oberstufe der Gymnasien voll etabliert, wenn in den "Einheitlichen Prüfungsanforderungen im Fach Mathematik" auch für Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik "Lernzielkataloge" angegeben werden.
Maßgeblich für die Einführung des Stochastikunterrichts in der Sekundarstufe II war sicherlich auch die Tagung im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach vom 24.1.1971 bis 30.1.1971, auf der sich Professoren der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Dozenten für Didaktik der Mathematik und Lehrer von Gymnasien nur mit dem Thema 'Stochastik im Unterricht' befaßten.

Parallel zu diesen Bemühungen, die ausschließlich Curricula für die gymnasiale Oberstufe zum Ziel hatten, werden Veröffentlichungen vorgelegt, in denen ein viel früherer Stochastikunterricht gefordert wird.

Inhelder schreibt 1959 in ihrem Memorandum für die Woods-Hole-Conference: "Die Wahrscheinlichkeitstheorie, die so verbreitet und wichtig in der modernen Naturwissenschaft ist, wird in unserem Erziehungssystem kaum vor dem Eintritt in die Oberstufe gelehrt. Dieser Mangel rührt wahrscheinlich daher, daß Lehrpläne in fast allen Ländern dem wissenschaftlichen Fortschritt mit einem nahezu katastrophalen Abstand nachhinken. Aber es könnte auch in der weitverbreiteten Auffassung gründen, daß das Verstehen von Zufallserscheinungen davon abhängt, daß der Lernende die Bedeutung der Seltenheit oder Häufigkeit von Ereignissen erfaßt. Und solche Vorstellungen, das müssen wir zugeben, können schwer an Kinder herangetragen werden. Aufgrund unserer Forschungsergebnisse stellten wir allerdings fest, daß das Verständnis für Zufallserscheinungen solche konkreten logischen Operationen erfordert, die durchaus von Kindern verstanden werden - vorausgesetzt, daß diese Operationen nicht in einer ungünstigen mathematischen Sprache gefaßt sind. Zu diesen grundlegenden logischen Operationen gehören Disjunktion und Kombination. Spiele, in denen Lose gezogen werden, Roulettespiele und Spiele, bei denen das Ergebnis der Gaußschen Normalverteilung folgt, sind alle geeignet, dem Kind eine erste Vorstellung der logischen Operationen zu geben, die für ein Denken in Begriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie nötig sind. In solchen Spielen entdecken die Kinder zunächst einen völlig qualitativen Begriff des Zufalls, der als ein ungewisses Ereignis definiert wird im Gegensatz zu einem völlig gewissen. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit als eines Bruchteils der Gewißheit wird erst spät entdeckt. Jede dieser Entdeckungen kann gemacht werden, ehe das Kind Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder die formalen Ausdrücke lernt, die solcherweise zur Wahrscheinlichkeitstheorie gehören. Interesse an Fragen der Wahrscheinlichkeitstheorie könnte leicht erweckt und entwickelt werden, bevor irgendwelche statistischen Berechnungen eingeführt werden. Statistische Überlegungen und Berechnungen sind lediglich Werkzeuge, die man nur gebrauchen kann, nachdem intuitives Verständnis erreicht wurde. Wenn das rechnerische Drum und Dran als erstes unterrichtet wird, dann wird es wohl die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsdenkens eher hemmen oder völlig unterdrücken. (Inhelder,in Bruner. 1970,S.112)

David Page, Teilnehmer der Woods-Hole-Conference im September 1959, der von Bruner als "einer der erfahrensten Lehrer auf dem Gebiet der elementaren Mathematik" bezeichnet wird (Bruner 1970, S. 109), stellt fest: "Während ich in allen Altersstufen vom Kindergarten bis zur Universität unterrichtete, habe ich über die Ähnlichkeit des Intellekts der Menschen jeden Alters gestaunt - wenn auch Kinder vielleicht spontaner, schöpferischer und energischer sind als Erwachsene. Meiner Meinung nach lernen Kinder fast alles schneller als Erwachsene, wenn es ihnen in Begriffen übermittelt wird, die sie verstehen." (in Bruner 1970, S. 109)
Im Jahre 1963 wird das Teilcurriculum Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik der Cambridge Conference on School Mathematics veröffentlicht, das im Anschluß an die Woods-Hole-Conference für die Klassen 7 bis 12 entwickelt worden war. 1966 erscheinen die Schulbücher der "School Mathematics Study Group" für die Grundschule und die Sekundarstufe I.

In der Bundesrepublik sind die Veröffentlichungen von A. Engel bahnbrechend für die Diskussion frühzeitigen Stochastikunterrichts. Er war wohl der erste Fachdidaktiker, der betonte, daß elementare Kenntnisse in der Stochastik eine unabdingbare Kulturtechnik in unserer Zeit darstellen: "Die Wahrscheinlichkeitstheorie hat in den zwei letzten Jahrzehnten eine ungeahnte Entwicklung durchgemacht. Sie ist buchstäblich in alle Natur- und Geisteswissenschaften eingedrungen. Diese Tendenz wird sich fortsetzen, da alle Erscheinungen der realen Welt mehr oder weniger stochastischer (zufälliger) Natur sind. Daher muß jeder Gebildete ausreichende Grundkenntnisse auf den Gebieten Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik besitzen." (1966,S.5; vgl. auch S. 55) Ebenfalls betonte er, daß es nötig sei, die einzelnen Gebiete der Wahrscheinlichkeitstheorie sofort zu behandeln, "sobald die Schüler über die notwendigen technischen Voraussetzungen verfügen" und "die intuitive Einführung darf nicht falsch oder irreführend sein, sondern nur unvollständig strukturiert" (1966,S.6)
Engel erstellte einen Stoffplan für Schüler der Unter- Mittel- und Oberstufe des Gymnasiums. (Später werde ich darauf zurückkommen)

Für Grundschulkinder machten Varga (1969) und Fischbein/Pampu/Minzat (1978 abgedruckt in G.Steiner: Didaktik der Mathematik) konkrete Vorschläge und berichteten über ihre positiven Erfahrungen.

In der Bundesrepublik greift Winter diese Vorschläge auf und integriert in sein Schulbuchwerk "Winter/Ziegler, Neue Mathematik" beinahe durchgehend stochastische Elemente. Auf seine Initiative hin wurden in die Lehrpläne für die Grund- und Hauptschulen von Nordrhein-Westfalen schon ab 1969 stochastische Inhalte aufgenommen.

4.1.2. Stochastik-Lehrgänge für 10-12jährige Schüler

Da die Einführung in die Stochastik für jüngere Schüler nicht von vornherein zwingend völlig anders geartet sein muß als für Oberstufenschüler bzw. Studienanfänger, werde ich hier zuerst alle mir bekannten verschiedenen Einstiegsmöglichkeiten anführen, anschließend die für diese Altersstufe evtl. ganz ungeeigneten außer Acht lassen, um mich schließlich für einen der Einstiege zu entscheiden.
Für die gymnasiale Oberstufe besteht im Anschluß an die Veröffentlichung des sog. "Normenbuches Mathematik", d.h. der "Einheitlichen Prüfungsanforderungen im Fach Mathematik" im Jahre 1975 ein gewisser "Minimalkonsens darüber, welche Inhalte dem Schüler aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik angeboten werden sollen: Elemente deskriptiver Statistik anhand von Zufallsexperimenten und dem Häufigkeitsbegriff leiten zum Wahrscheinlichkeitsbegriff und dem Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten über, danach werden Grundaussagen der Kombinatorik behandelt, beschlossen wird ein solcher Kurs mit Untersuchungen zur Binomialverteilung und ausgewählten Problemen der schließenden Statistik." (Sträßer 1977, S. 235)
Der Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird hier also über die beschreibende Statistik vorgenommen und die grundlegenden Begriffe der Theorie so vorbereitet und motiviert.
R.Ineichen betont in diesem Zusammenhang: ".. diese Motivationsmöglichkeiten scheinen uns sehr vorteilhaft. Man muß nur achtgeben, daß eine solche Einführung - wenn etwa zuviel Zahlenmaterial behandelt wird - nicht langweilig wird und dadurch jener Schwung verloren geht, der beim Einstieg in ein neues Gebiet erfreulicherweise oft vorhanden ist. Deshalb: wenige

Beispiele, möglichst interessantes Zahlenmaterial.." (1980,S. 82)

Ineichen führt aber auch noch einige andere Möglichkeiten des Einstiegs an, die von seinem Weg z.T. sehr verschieden sind. Etwa den Vorschlag von Borges (1978), bei dem die deskriptive Statistik viel weitgehender betrieben wird, "bevor dann die Wahrscheinlichkeiten als Maßzahlen erklärt werden." (Ineichen 1980, S. 85) oder die Vorgehensweise von Freudenthal (1968), der im Vorwort selbst betont: "Dies Büchlein soll mehr in die Denkweise als in die Technik einführen. Es operiert so viel wie möglich elementar und intuitiv. Das meiste soll jedem mit höherer Schulbildung in Mathematik zugänglich sein. Vom Leser wird erwartet, daß er mitdenkt..."(Freudenthal 1968)
Freudenthal führt über Laplace-Experimente zuerst den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff ein und benutzt dann das Urnenmodell, mit dessen Hilfe er viele verschiedenartige, auch kompliziertere Situationen deutet. Er verzichtet auf die ausdrückliche Formulierung von Axiomen.
Aus A.Renyi "Briefe über die Wahrscheinlichkeit" (1969) habe ich bereits im ersten Abschnitt einige Stellen zitiert. Ineichen schreibt über diese Möglichkeit: "Das weniger als hundert Seiten umfassende Büchlein könnte einen sehr schönen und tief gehenden Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung bieten..." (Ineichen 1980, S. 86)
L.Vietoris (1954) hat für den Unterricht einen Weg mit einem komparativen Wahrscheinlichkeitsbegriff vorgeschlagen. Er geht aus von der "eher"-Relation. Der "eher"-Begriff wird schließlich durch Axiome eindeutiger beschrieben und mit einem Dedekindschen Schnitt etwa können dann für die Ergebnisse solcher Experimente auch Wahrscheinlichkeiten definiert werden.
Ineichen verweist schließlich noch auf Huygens und Bayes, die den Erwartungswert als "eigentlichen Grundbegriff in ihren Darstellungen" verwendeten und auf die "Einführung in Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Simulation", von H.Wunderlich. Wunderlich (1977) verwendet hierzu den Computer und "der Schüler wird als 'homo ludens' in die einschlägigen Fragestellungen eingeführt." (Ineichen 1980, S.86)

Als "besonders einladend" bezeichnet Ineichen schließlich den Weg, den A.Engel vorschlägt: "Wahrscheinlichkeitstheorie für Sexta bis Oberprima." "Durch einen derartigen kontinuierlichen Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik würde es

möglich, in der Oberstufe ganz anders vorzugehen und einen viel weiteren Kreis von Themen zu behandeln. .. Von einer solchen Durchdringung des gesamten Mathematikunterrichts mit Wahrscheinlichkeitsrechnung scheint man indessen in den meisten Schulen noch weit entfernt." (Ineichen 1960, S.85)

4.1.2.1. Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie von A.Engel

Engel selbst schreibt dazu: "Der Schüler ist mit der Wahrscheinlichkeitstheorie während seiner ganzen Schulzeit in Berührung und wird durch sie geprägt."(1966a, S.7)
Engel hat seinen Kurs "in gekürzter Form mehrmals erprobt."
Im folgenden zitiere ich seinen Stoffplan für die 5. und 6. Jahrgangsstufe:

"Sexta: Versuche mit endlich vielen Ausfällen und der zugehörige Stichprobenraum, Ereignisse als Teilmengen des Stichprobenraumes, Verknüpfung von Ereignissen. Die Anzahlfunktion auf den Teilmengen einer Menge, Baumdiagramme und gerichtete Graphen. Grundregel des Zählens und ihre Anwendungen. Zufällige Auswahl eines Elementes aus einer Grundmenge.

Quinta: r-Teilmengen einer n-Menge, sowie Wege im Koordinatengitter führen auf die Pascalzahlen $\binom{n}{r}$. Sobald die Schüler mit Brüchen rechnen können, treibt man naive Wahrscheinlichkeitstheorie an Baum und Gitter. Vorsichtige Einführung der Begriffe "zufällige Variable" und "Mittelwert". Die meisten Rechnungen werden durch Massenexperimente gestützt."(1966a, S.6)

Engel setzt für seinen Kurs grundlegende Begriffe der Mengensprache voraus und beginnt mit Kombinatorik, wobei er gleich die Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie benutzt:

Sprache der Mengenlehre	Sprache der WT
Grundmeng S	Stichprobenraum, Raum, sicheres Ereignis
leere Menge Ø	unmögliches Ereignis
Element $s_i \in S$	Stichprobenpunkt, Punkt
Einelementige Menge $\{s_i\}$	elementares Ereignis
Teilmenge $A \subset S$	Ereignis
Komplement $\bar{A} = S \setminus A$ von A bezüglich der Grundmenge S	Gegenereignis $\bar{A}$ (lies nicht A) von A
Durchschnitt $A \cap B$	Ereignis "A und B"
Vereinigung $A \cup B$	Ereignis "A oder B"

(ebd. S. 8)

Eine zentrale Rolle spielen bei Engel Experimente und Diagramme. (Baum-, Wege-, Fluß-, Gitter- und Carnaughdiagramme)
Sobald die Schüler in der Quinta Bruchrechnen können, beginnt Engel mit "naiver Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man beschränkt sich auf endliche Probleme, die an Baum und Gitter gelöst werden. Auch die Begriffe "Zufallsgröße" und "Mittelwert" werden vorbereitet." (Ebd., S. 13)

4.1.2.2. Der Lehrplan von Varga für die 1. bis 6. Klasse

Varga (1969) entwickelte für die Klassen 1 - 6 eine Lehrfolge. Er beginnt in der 1. Klasse mit Zufallsexperimenten, wie Reißnagelwerfen, und erstellt Strichlisten und zeichnet Blockdiagramme. In der 2. Klasse folgen Abzählaufgaben und Spiele, mit deren Hilfe die Kinder zwischen unmöglich, möglich und sicher unterscheiden lernen sollen. In der 3. Klasse folgen weitere kombinatorische Aufgaben, das arithmetische Mittel, Baumdiagramme werden verwendet und Wahrscheinlichkeiten geordnet.
In der 4. Klasse schließen sich absolute und relative Häufigkeiten, die auch graphisch veranschaulicht werden, an.
Klasse 5: Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit in Bruchform und in Prozenten ausgedrückt.In der 6. Klasse werden relative Häufigkeit/Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert/arithmetisches Mittel betrachtet und die Unabhängigkeit von Ereignissen in Beispielen zur Sprache gebracht. (Vgl. Göhner/Weber 1971)
Varga betont besonders, daß stochastische Inhalte in allgemeinmathematische Lerninhalte integriert werden sollen, daß Stochastikunterricht zur Umwelterschließung beitragen kann und daß dazu spezielle Strategien entwickelt werden müssen. (Strategische Spiele, Wahrscheinlichkeitsleitern etc.)
Varga schreibt: "..vielleicht ist es nur noch eine Frage der Zeit, daß sie (die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Anmerkung von mir) einen integrierenden Bestandteil der Lehrpläne in allen Ländern bildet." (Glaymann/Varga 1975, S.7) "Um das Kind in spezifische Vorstellungen einzuführen, muß man spezifische Mittel einsetzen. Man darf nicht nur mit dem Zufall rechnen, um zufälligen Ereignissen zu begegnen und die Kinder die Gesetze der Wahrscheinlichkeit entdecken zu lassen; man muß Strategien einführen, die Eigentätigkeit ansprechen, um die natürliche Neugier des Kindes zu wecken, man muß das Kind dahin führen, daß es sich mit der

Wirklichkeit konfrontiert und gegen seine möglicherweise falschen Vorstellungen angeht." (ebd., S. 6)

4.1.2.3. Der Unterrichtsversuch von Fischbein/Pampu/Minzat

Fischbein u.a. (1969) hielten in vier 4. Klassen (10-11jährige Schüler) fünf Stunden und in drei 5. Klassen (11-12jährige Schüler) drei Stunden Unterricht und eine abschließende schriftliche Kontrollarbeit.
Dem Unterrichtsversuch ging eine Wiederholungsphase über Bruchrechnung voraus. Vor allem wurde das Kürzen wiederholt.
In der ersten Stunde des Versuchs wurde der Begriff Ereignis an Beispielen erläutert (Urnenziehungen, Würfeln, Münzwurf..) und dann zwischen sicheren, möglichen und unmöglichen Ereignissen unterschieden.
"Die zweite Stunde war dem mathematischen Begriff der Wahrscheinlichkeit und seiner Ableitung aus einer Versuchsanordnung gewidmet. Den Kindern wurden zwei Stapel mit Umschlägen vorgelegt und ihnen gesagt, daß eine gewisse Anzahl von diesen Gewinnlose enthielten. So war die Gesamtzahl (die Zahl der Umschläge in einem Stapel) gegeben und brauchte nicht ermittelt zu werden. Die Aufgabe war, den Stapel zu wählen, der die größten Chancen bot, ein Gewinnlos zu ziehen." (S.143f)
Fischbein u.a. begannen mit zwei Stapeln gleicher Chancen, auf die dann auch Stapel mit ungleichen Chancen folgten (3/12, 4/8, 2/10, 3/9) Da diese Schüler schon kürzen konnten (im Gegensatz zu unseren Schülern der 4. und 5. Klassen), erkannten sie die Ungleichheit der verglichenen Brüche "und ebenso die Tatsache, daß man, wenn man die Gewinnlose zur Gesamtzahl der Umschläge in Beziehung setzt, für die zwei verglichenen Stapel verschiedene Ergebnisse erhält." (S. 145)
"Die Schüler erarbeiteten auf diese Weise einerseits die statistische Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und andererseits die Vorstellung vom Vorhandensein einer konstanten Tendenz, welche die Aufeinanderfolge der zufälligen Ereignisse bestimmt. So wurden die Voraussetzungen für die Verschmelzung des Zufälligen und das Gesetzmäßigen geschaffen, die vom Psychologischen her die Basis des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ist." (S. 146)
In der 4. Stunde wurden die Kenntnisse der vorhergehenden Stunde vertieft und die 5. Stunde hatte zum Ziel, "durch Stichproben

die Stabilität der relativen Häufigkeit herauszustellen." (S.146)

Im Abschlußtest erzielten die Schüler der 4. Klassen durchaus zufriedenstellende Ergebnisse. In der 5. Klasse war das Ergebnis nicht so gut, weil dort nur 3 Stunden unterrichtet werden konnte. Mit den Schülern der 5. Klassen wurde dann aber in der 6. Klasse weitergearbeitet. "Wir waren überrascht, daß ein großer Teil der Schüler sich nach mehreren Monaten noch an die behandelten Begriffe erinnerte." (S. 149/150)
In der 6. Klasse wurden dann noch die Begriffe 'unabhängiges Ereignis' und 'bedingte Wahrscheinlichkeit' erarbeitet. Fischbein u.a. verwendeten wieder das Urnenmodell und zogen Baumdiagramme zuhilfe. In insgesamt 5 Stunden wurde mit verschiedenen Urnenzusammenstellungen gearbeitet und kombinatorische Probleme erörtert. Abschließend fand wieder ein Test statt, der auch zufriedenstellende Ergebnisse zeigt. Bis zu 91,30% richtige Antworten bei einer Frage! Die Unterrichtsversuche von Fischbein/Pampu/Minzat haben also gezeigt, daß man Stochastik, so aufbereitet, in dieser Altersstufe mit Erfolg unterrichten kann.

Fischbein u.a. kommt es sehr darauf an, "daß der statistische und der probalistische Aspekt in ihrer inneren Einheit erfaßt wird." (S. 158;dritte Stunde der 4. und 5. Klassen)
Ebenso betonen sie, daß die zentralen Begriffe der Stochastik schon frühzeitig intuitiv in die richtige Bahn geleitet werden müssen. "Die in der 4., 5. und 6. Klasse ....gegebenen Stunden haben - nicht nur durch ihren Verlauf, sondern auch durch die in den Kontrollarbeiten erzielten Resultate - das besondere Interesse der Kinder und ihre Empfänglichkeit für diese Begriffe bewiesen." (s. 158)

4.1.2.4. Lehrgänge in Schulbüchern der Bundesrepublik

Winter hat als erster in seinem Lehrbuchwerk "Neue Mathematik" (Winter/Ziegler 1970 f) durchgehend (ohne Band 1 und 5) stochastische Inhalte integriert. Bei ihm werden für die Grundschule auf intuitiver Basis Ereignisse "vorzahlig verglichen", also ein komparativer Wahrscheinlichkeitsbegriff benutzt.
Winter hält es auch für sinnvoll, über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen "Zugang zum Bruchzahlbegriff (für Bruchzahlen ≤ 1)" zu gewinnen. .."Eine 'qualitative' Wahrscheinlichkeitsskala

unmöglich, fast unmöglich, ...fast sicher, sicher kann nun numerisch .. präzisiert werden... Dieser 'stochastische' Zugang zum Bruchzahlbegriff läßt die Schüler auch sogleich erfahren, wozu man Bruchzahlen brauchen kann." (Winter 1976, S. 36)

Heitele (1977) hat im Anschluß an die Veröffentlichungen von Engel, Varga, Fischbein u.a. und Winter für den Stochastikunterricht in der Grundschule sieben Thesen aufgestellt, die für den Unterricht in der 5. Klasse, wo ja auch noch kein Bruchrechnen vorausgesetzt werden kann, ebenso gelten:

"a) Der Einstieg in die Stochastik soll problemorientiert vorwiegend aus der Welt des Kindes erfolgen. ..

b) Der Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriff kann und soll auf zwei verschiedenen Wegen nahegebracht werden:

i) theoretisch, durch Symmetriebetrachtungen

ii) empirisch, durch Stichproben.

Ein vorgeschaltetes Stadium, in dem man sich mit "qualitativen bzw. komparativen" Wahrscheinlichkeiten beschäftigt, scheint günstig.

c) Begriffsexplizierungen, etwa was ein Zufallsexperiment oder die Wahrscheinlichkeit nun wirklich ist, und entsprechende Eintragungen ins 'Merkheft' sind inadäquat. ...

d) Stochastik im Primarbereich ist kein eigenes Stoffgebiet sondern eher ein Aspekt oder Unterrichtsprinzip, das den gesamten Mathematikunterricht durchzieht, und bildet gewissermaßen einen L e r n b e r e i c h , in dem Phänomene der Realität mathematisiert und (vor allem Zufallsvariable) durch geeignetes Material in Handlungen, Bildern und Diagrammen modelliert werden.

e) Als geeignetes Mittel für diese Modellierungen erscheinen ganz besonders geeignet didaktische Erfindungen wie die Wahrscheinlichkeitsleiter von Varga, strategische Spiele von Varga und Winter, sowie die Simulation von Engel.

f) Die Stochastik eignet sich in hervorragender Weise zur Integration. Die integrative Kraft stochastischer Problemsituationen sollte voll ausgenützt werden.

g) Jeder Kurs, in dem die fundamentalen Ideen der'Zufallsvariablen' und der 'Unabhängigkeit' nicht angemessen zur Geltung kommen, erscheint der Struktur der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht adäquat. (Heitele 1977, S. 305)

In den Schulbuchkapiteln über Stochastik der 6. Klassen wird in der Regel eine systematischere Einführung der Wahrscheinlichkeit vorgenommen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befindet sich dann in der Regel hinter den Abschnitten über Bruchrechnen und Prozentrechnen.
Man kann hier zwei verschiedene Hinführungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff finden. (Vgl. Jahner 1976, S. 229)

Einmal wird der Begriff mit Hilfe eines Modells entwickelt - meistens verwendet man das Urnenmodell -, nachdem die Begriffe Ergebnis und Ereignis an Diagrammen erarbeitet wurden. Über Stichproben führt man dann den Begriff der Häufigkeit ein und zeigt schließlich, daß bei entsprechend großer Stichprobe die Häufigkeiten als Näherungswerte für die Wahrscheinlichkeiten herangezogen werden können. Athen/Griesel 1978; Andelfinger/Nestle 1977 oder Rohrl 1972 gehen so vor.

Andere Autoren gehen aus von der relativen Häufigkeit, lassen die Schüler in Versuchen feststellen, daß sie sich einer Zahl annähert und nennen die Schätzung dieser Zahl dann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Bei Hayen/Vollrath/Weidig 1977, S. 123 heißt es:"Mit wachsender Anzahl von Wiederholungen eines Zufallsversuches nähert sich die relative Häufigkeit eines Ausfalls einer bestimmten Zahl. Eine Schätzung dieser Zahl nennt man Wahrscheinlichkeit des Ausfalls."

Wenn man bei diesem zweiten Weg den Begriff der relativen Häufigkeit über Tabellen und Strichlisten, d.h. über die deskriptive Statistik herleitet, dann ist dieses Vorgehen identisch mit dem "Minimalkonsens" der Oberstufendidaktik. (Vgl. S. 62)

Es gibt z.Z. beinahe kein Unterrichtswerk mehr für die 6. Klasse (vor allem des Gymnasiums), das nicht etliche Seiten Stochastik beinhalten würde.
In der Bibliographie von Kinder/Schmitz "Stochastik in der Schule" (1975) waren für das 6. Schuljahr nur Athen/Griesel: Mathematik heute mit 21 Seiten und Winter/Ziegler: Neue Mathematik mit 13 Seiten vertreten. In Schulbüchern für die 5. Klasse war noch nirgends Stochastik zu finden.
Im Jahre 1980 sieht das vor allem für die 6. Klassen ganz anders aus:

Andelfinger/Nestle, Mathematik 1977	6. Klasse
Athen/Griesel, Mathematik heute, 1971	6. Klasse
Bigalke, Einführung in die Mathematik, 1974	6. Klasse
Glatfeld/Löttgen, Mathematik in der Sekundarstufe, 1977	6. Klasse
Hahn/Dzewas, Mathematik, 1977	5. Klasse
1978	6. Klasse
Hahn/Usoeck, Mathematik, 1975	6. Klasse
Hayen/Vollrath/Weidig, Gamma 1977 Gymnasium	5. Klasse
1977 Gymnasium	6. Klasse
Köhler/Ostermann/Steinberg, Mathematik in der Sekundarstufe, 1975	5. Klasse
Kuntze/Sattler, Bausteine der Mathematik, 1977	5. Klasse
1978	6. Klasse
Lambacher/Schweizer, Rechnen und Raumlehre, 1972	6. Klasse
Neubert/Wölpert, Mathematik-Denken und Rechnen, 1978	5. Klasse
1978	6. Klasse
Neunzig, Wir lernen Mathematik, 1972	6. Klasse
Oehl/Palzkill, Die Welt der Zahl - Neu, 1977	6. Klasse
Röhrl, Mathematik B, 1971	5. Klasse
1972	6. Klasse
Schmitt/Wohlfahrt, Mathematik, 1976	6. Klasse
Winter/Ziegler, Neue Mathematik, 1970	6. Klasse
Wörle, Arithmetik mit Geometrie, Gymnasium, 1978	6. Klasse

Mit dieser Aufstellung kann ich keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben, da mir sicherlich nicht alle in der Bundesrepublik verwendeten Schulbücher vorlagen. Aber diese Aufzählung zeigt doch sehr eindrucksvoll den Trend zum früheren Stochastikunterricht zumindest vonseiten der Schulbuchautoren und Verlage.

Für diese Tatsache spricht auch folgender Abschnitt aus der Resolution der Teilnehmer der 3. Oberwolfacher Tagung "Stochastik auf der Schule" vom 10.12. - 16.12.1978: "Wir halten es für wünschenswert, daß der Raum für die Stochastik auf der Sekundarstufe I dazu benutzt wird, Erfahrungen mit ungenauen Zahlenangaben und schwankenden Zahlenreihen zu sammeln, zu organisieren und (unter dem Gesichtspunkt pragmatischer Entscheidungen) zu verarbeiten. Besondere Aufmerksamkeit verdienen daneben systematisch ausgewählte Beispiele stochastischen Denkens, die mit traditionellen Schulstoffen (wie Bruchrechnen, quadratische Funktionen, u.a.) zusammengebracht werden können." (in: Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 79/1, S. 159)

4.1.2.5. Das Curriculum-Projekt "Stochastik in der Hauptschule" unter der Leitung von Schupp/Jäger

In diesem Projekt wird zwar Stochastik erst in der 7. Klasse eingeführt und es werden auch nur Inhalte speziell für die Hauptschule ausgewählt, aber ich möchte hier doch einige Aspekte aus den Zwischenberichten über die Ergebnisse der Erprobung des Teilcurriculum für die 7. Klasse anführen.

Vorab Schupps Begründung, warum die 5. und 6. Klasse nicht einbezogen wurde:
"a) Der Stoffkanon dieser beiden Klassen ist schon jetzt überfrachtet. Wer (bei unveränderter, teilweise sogar reduzierter Stundenzahl) neue Inhalte propagiert, sollte angeben können, wo anderwo gestrichen bzw. reduziert werden kann. Dies ist ab Klasse 7 vor allem im Bereich der Algebra ... möglich.
b) Für den statistischen Zugang zur Stochastik sind die Schüler erst etwa ab der 7. Klasse motivierbar. Wer in den Klassen davor für sichere Kenntnisse in der Bruch-, Dezimal- und Prozentrechnung, in der Mengenalgebra und der elementaren Kombinatorik (Produktregel!) sorgt, leistet der Stochastik bessere Dienste als derjenige, welcher Aufgabenbatterien über klassische Wahrscheinlichkeiten behandelt." (Schupp 1979a, S. 307f)

Das Projekt "Stochastik in der Hauptschule" wird an der Universität Saarbrücken seit 1975 durchgeführt mit einer mindestens 7-jährigen Laufzeit. Das intendierte Curriculum "muß auf den besonderen Auftrag der Hauptschule und auf das spezifische Leistungs- und Motivationsprofil ihrer Schüler zugeschnitten werden."
(Schupp 1979b, S. 25)
"Das 'Teilcurriculum Stochastik in der Hauptschule 7' hat folgende Phasen:

1. Einstiegsphase: Galtonbrett und Mittenbevorzugung
2. Erweiterungsphase: Andere stochastische Geräte und Situationen
3. Vertiefungsphase: Erste Lösung des Problems der Mittenbevorzugung durch Einführung des Wahrscheinlichkeitskonzeptes
4. Anwendungsphase: Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei einfachen Zufallsexperimenten

Zu jeder Phase wurden vorgegeben:
a) eine didaktische Begründung im Rahmen des Gesamtprojekts
b) Ziele (mittleren Feinheitsgrades)

c) Inhalte
d) Methoden und Medien
e) Hinweise auf geeignete Passagen in Schulbüchern
f) eine Auswahl charakteristischer Aufgaben
Dabei sind c) -f) als Angebote zu verstehen.

Leitziel in Klasse 7 ist der Aufbau einer stochastischen Sensibilität; sie hat folgende Komponenten:
- Einsicht in Vielzahl und Bedeutung stochastischer Situationen
- Aufgabe irrationaler Verhaltensmuster in solchen Situationen
- sicherer Umgang mit einigen stochastischen Basisbegriffen
- Fähigkeit zur Anwendung dieser Begriffe
- kritische Stellungnahme zu deren Gebrauch durch andere ."

(Schupp 1979b, S. 28f)

Die Curriculum-Evaluation orientiert sich an Methoden der Handlungsforschung; sie bezieht neben empirischen Forschungsmethoden auch Inhalts- und Prozeßanalysen mit ein, ebenso wird laufend formative Evaluation betrieben.
"Die Ersterprobung des Teilcurriculum 'Stochastik in Klasse 7' erfolgte in 14 Klassen mit insgesamt 350 Schülern während des zweiten Halbjahres 1977." (Schupp 1979b. S.30)

Über die inhaltlichen Unterschiede zu vorliegenden Lehrgängen:
"a) durchziehende Arbeit an einem Leitproblem (Mittenbevorzugung)
b) frühe Einführung und konsequente Verwendung des Verteilungsbegriffs
c) Verschränkung von statistischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen
d) Datenerhebungen durch Schüler
e) Zurückhalten stochastischer Parameter
f) Verzicht auf Mengensprache
g) Herausarbeiten der Abhängigkeit von Ergebnisart und -anzahl von den Interessen des Experimentators."

(Schupp, 1978, S. 247)

Zu den bisherigen Ergebnissen:
"Nacheinander haben die Schüler drei dialektisch gefügte Phasen durchlaufen:
die deterministische Phase: "Ich weiß, wo die Kugel hinfällt."
die fatalistische Phase: "Ich weiß nicht, wo die Kugel hinfällt."

die stochastische Phase: "Ich weiß nicht, wo eine einzelne Kugel hinfällt, aber ich weiß, wie sich viele Kugeln verteilen werden."

An die Stelle verzerrender oder gar falscher Primärintuitionen sind stimmige und einsetzbare Sekundärintuitionen getreten." (Schupp 1976, S. 205)

Zu den weiteren Phasen: "Die intendierte 'stochastische Sensibilisierung' hat stattgefunden. Erhebliche Schwierigkeiten traten allerdings bei den mehrstufigen Experimenten auf, hervorgerufen durch Ermüdungserscheinungen am Ende des Lehrgangs und durch fehlende Voraussetzungen (Baumdiagramm). Die vorgesehene Unterrichtszeit wurde erheblich überschritten; das liegt an der Unterschätzung der Schwierigkeit beim Mathematisieren, am Fehlen von Leitbegriffen (Operator, Verhältnis) und Techniken (Diagramme), an der Unermüdlichkeit der Schüler im Aufgreifen von Situationen und an der bei Erstbehandlungen üblichen Unsicherheit der Lehrer. (Schupp 1978, S. 247f)

4.1.3. Stochastik in den gültigen Lehrplänen der Bundesländer für die 5. und 6. Jahrgangsstufe

In den jetzt gültigen Lehrplänen der 11 Bundesländer für die 5. und 6. Jahrgangsstufe ist die Stochastik ganz unterschiedlich vertreten.

In Hessen und im Saarland fehlt Stochastik in dieser Jahrgangsstufe ganz. (Siehe Rahmenrichtlinien, Sekundarstufe I, Mathematik, Der Hessische Kultusminister 1976 und Schulreform an der Saar, Vorläufiger Lehrplan für die Klassenstufe 5 und 6 von Gymnasium, Hauptschule, Realschule und Orientierungsstufe 1976 und 1977) In Hessen werden dann in der 7. Klasse vier Wochen für Stochastik veranschlagt mit den Inhalten Zufallsexperiment, Ereignis und Häufigkeit, Ereignis und Wahrscheinlichkeit.

In den Lehrplänen von Bayern, Niedersachsen und Schleswig-Holstein finden sich einige wenige stochastische Elemente.

In Bayern enthält der Curriculare Lehrplan der 6. Jahrgangsstufe der Hauptschulen und aller am Schulversuch Orientierungsstufe beteiligten Schulen (KMBl So.Nr. 19/1976, S. 668) folgendes Lernziel: "Fähigkeit"(bzw. Fertigkeit für das gymnasiale Niveau) "Bruchzahlen zu ordnen. Anwendungsmöglichkeiten ergeben auch Aufgaben zur relativen Häufigkeit." Diese Anwendungsmöglichkeit

steht allerdings in eckigen Klammern, d.h. dieser Inhalt gilt als "verzichtbarer Lerninhalt" (S.666) Im Lehrplan für die 6.Klasse Gymnasium vom 6.5.1977 werden als Anwendungsmöglichkeit zum Ordnen von Bruchen Aufgaben zur relativen Häufigkeit vorgeschlagen. (S. 516)

Der Niedersächsische Rahmenrichtlinienentwurf von 1976 nennt unter Sachrechnen I (S.8/9) die Lernziele: "Daten in Listen und Tabellen erfassen", "Daten in Diagrammen darstellen" und verlangt in diesem Zusammenhang die Verwendung der Begriffe "Daten, Liste, Tabelle, Blockbild und Streckenzug".

Der Lehrplan Orientierungsstufe Mathematik von Schleswig-Holstein (Kiel 1977) beinhaltet unter dem Abschnitt Sachrechnen lediglich das Lernziel "Mittelwerte berechnen; z.B. Notenmittel einer Klassenarbeit". (S.46)

Die restlichen Bundesländer haben den Inhalt Stochastik bereits in höherem Maße in den Mathematikunterricht der 5. und 6. Klasse integriert.
In Berlin wird schon in der 1. und 2. Jahrgangsstufe Stochastik als Ergänzungsangebot empfohlen(1974, S.35): "Einfache Beispiele zur Wahrscheinlichkeit und Statistik:
1. Die Schüler sollen Informationen (Daten) aus ihrem Erfahrungsbereich ...sammeln und in Säulendiagrammen ...darstellen können.
2. Die Schüler sollen Säulendiagramme lesen können.
3. Die Schüler sollen einfache Zufallsexperimente durchführen und die Beobachtungsergebnisse tabellarisch darstellen können.
In der 3/4. Klasse ist beschreibende Statistik ein verbindlicher Lerninhalt. 15 Begriffe werden hier (S. 47f) angegeben und näher erläutert: Strichlisten, Häufigkeit, die (absoluten) Häufigkeiten gleichartiger Merkmale vergleichen können,Vorgänge als zufallsabhängig beschreiben können; an einfachsten Beispielen kombinatorische Fragestellungen auch mit Hilfe eines Baumdiagramms bearbeiten können...
In der 5./6. Klasse (1977) ist beschreibende Statistik ebenfalls verbindlicher Lerninhalt.

In Baden-Württemberg (1977) sind in der 5. Klasse folgende stochastische Inhalte verbindlich vorgeschrieben für alle Niveaus:

Anzahlen: "Anzahlen systematisch bestimmen und angemessen darstellen. Aufstellen und Auswerten von Strichlisten und Tabellen. Feststellen von Anzahlen, z.B. aller Permutationen von 3,4 Elementen. Darstellen empirisch gewonnener Verteilungen ..mittels Blockdiagramm" (Kultus und Unterricht, 13.6.77, S. 112)
Für das Niveau der Realschule und des Gymnasiums stehen noch weitere Inhalte unter dem Abschnitt 'Aussagen und Mengen':
"Den Stichprobenraum als Menge aller möglichen Ausgänge eines Zufallsexperimentes erfassen; Ereignisse als Mengen von Ausgängen auffassen; den Zusammenhang zwischen Ereignis und Aussageform erkennen; Ein- und mehrstufige Zufallsexperimente und deren Ereignisse veranschaulichen; Das Eintreten von Ereignissen mit der Element-Mengen-Beziehung ausdrücken; Das unmögliche Ereignis und das sichere Ereignis als Sonderfälle erkennen ... (S. 118f)

In der 6. Klasse werden für die Gymnasien folgende Ziele verbindlich vorgeschrieben:
"Erkennen, daß bei n Wiederholungen von Zufallsexperimenten die anteilige Häufigkeit (relative Häufigkeit)h von Ereignissen bei hinreichend großem n "stabil" wird.
Die Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse einfacher Zufallsexperimente berechnen.
Am Ereignisbaum m (oder im Gitternetz) Wahrscheinlichkeiten berechnen und mit der anteiligen Häufigkeit der Ereignisse bei entsprechenden Versuchsreihen vergleichen. (S. 137)

Bremen schreibt für die 6. Klasse fünf Wochen Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung vor. In der 5. Klasse finden sich keine stochastischen Inhalte.
Folgende Begriffe müssen im Unterricht erarbeitet werden: Ereignis, Häufigkeit, Ereignismenge, Grundmenge und Wahrscheinlichkeit.Die geforderten Kenntnisse und Fertigkeiten werden wie folgt formuliert:
"Bei Zufallsexperimenten die absolute Häufigkeit von Ereignissen bestimmen (Strichliste)
Bei verschiedener Anzahl der durchgeführten Experimente zum Vergleich die (relative) Häufigkeit h berechnen .....
Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzter Ereignisse durch Addition der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse berechnen."
(Lehrplan Orientierungsstufe 6 Mathematik, S. 9f)

Hamburg (1977) schreibt für die 6. Klasse der Beobachtungsstufe des Gymnasiums beschreibende Statistik (S.11) verbindlich für 4 Wochen vor, "wenn die Teilungsstunde voll in den Unterricht integriert wird."
Die intendierten Lernziele:
Protokolle statistischer Erhebungen, Strichliste, absolute Häufigkeit der Meßwerte bzw. Merkmalsausprägungen; graphische Darstellung: Histogramm (Staffelbild)
Relative Häufigkeit, Mittelwert, Einzelabweichung der Meßwerte vom Mittelwert, Mittelwert der Beträge der Einzelabweichungen. (53/44.4.00, S. 11)

In Nordrhein-Westfalen wird im Lehrplan für die Gesamtschule (1977) als zusätzliches Lernziel (S.39) für den gymnasialen Bereich Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik angegeben.

"Der Schüler
schätzt und vergleicht die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen und deutet sie als Punkte auf einer (qualitativen) Skala,
bestimmt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses bei "idealen Zufallsexperimenten" ....." (S.39/40)
Es werden insgesamt 19 Ziele angegeben vom Berechnen der Wahrscheinlichkeiten bis zur Beurteilung der Aussagekraft des Mittelwertes.

In den Richtlinien für den Mathematikunterricht in den 5. und 6. Klassen der Hauptschule (1977) findet man für die 5. Klasse unter dem Themenkreis "Sachrechnen" auch die mögliche (nicht verbindliche) Behandlung einfacher Zufallsexperimente und für die 6. Klasse ebenfalls unter dem Themenkreis "Sachrechnen" verbindliche Lernziele zur beschreibenden Statistik (ca. 6 Wochen).

Die Lehrplankommission von Nordrhein-Westfalen hat auch bereits in der Grundschule stochastische Inhalte verbindlich gemacht. Diese Tatsache ist vor allem auf die Initiative von H.Winter zurückzuführen. (Vgl. S. 62)

Der Lehrplan des Bundeslandes Rheinland-Pfalz (1972) beinhaltet für die 6. Klasse "Einfache beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeit ". Das Berechnen von Mittelwerten ist für alle Schüler verbindlich, während die Begriffe "Ausfall, günstiger Ausfall und Häufigkeit" als Additum gedacht sind. Folgende Lernziele sind angegeben:

Mittelwert:
Der Schüler soll zu einer Menge von Werten den Mittelwert berechne können. ....
Ereignisse:
Der Schüler soll zu drei vorgegebenen Mengen von Objekten, Eigenschaften bzw. Abläufen die Anzahl aller möglichen geordneten Tripel bestimmen können...
Häufigkeit:
Der Schüler soll die Häufigkeit eines bestimmten Ausfalls als Bruchteil aller Ausfälle angeben können... (S. 46/47)

Im Ausland - mit Ausnahme des anglo-amerikanischen Bereichs - ist es vielfach ähnlich wie bei uns. Stochastik hat sich auch dort in der Oberstufe etabliert, in der Mittel- und Unterstufe breitet sie sich allmählich aus. (Vgl. dazu H.Lang 1955 über Österreich; T.Postelnicu 1975 über Rumänien; W.Szlenk 1976 über Polen; H.Halmos 1975 über Ungarn und L.Rade 1975, der eine internationale Übersicht zusammengestellt hat.)

Stochastik breitet sich in den Schulbüchern und in den Lehrplänen aus. In der Praxis ist es aber wohl vielfach so, daß sie "aus verständlichen Zeitgründen weggelassen" wird.(Jahner 1976, S.231) In der 6. Klasse ist diese Gefahr besonders groß, wenn Stochastik nach dem Prozentrechnen angesetzt wird, das in den meisten Lehrplänen sowieso schon spat im Schuljahr an die Reihe kommt.

4.2. Lernziele, Lerninhalte und Unterrichtsverfahren des Teilcurriculum

4.2.1. Vorüberlegungen zur Integrierbarkeit in das bestehende bayerische Curriculum

Da es mein Ziel ist, ein in das bestehende bayerische Mathematik-Curriculum integrierbares Teilcurriculum 'Stochastik' zu konstruieren, muß ich zuerst in Betracht ziehen, welche Lernziele und Lerninhalte ich voraussetzen kann. Ich richte mich dabei nach dem Fundamentum (B-Niveau) des "curricularen Lehrplans Mathematik in der 5. und 6. Jahrgangsstufe der Hauptschule und aller am Schulversuch Orientierungsstufe beteiligten Schulen" vom Mai/ Oktober 1976; denn so gehe ich sicher, daß ich auch die unterste Niveaustufe berücksichtige. Das B-Niveau (Fundamentum) "hat für alle Schüler Gültigkeit. Für die leistungsschwächeren Hauptschüler ist damit die Mindestanforderung gegeben". (KMBI, So.Nr. 4/1976, S.88) Das A-Niveau besteht aus dem B-Niveau und zusätzlichen Anforderungen. Das G-Niveau fordert schließlich noch weitere Lernziele bzw. Lerninhalte.

Die Lerninhalte von Gymnasium und Hauptschule der beiden Klassen unterscheiden sich nur in einem Punkt. Die "Einführung des konkreten Bruchbegriffs" erfolgt für die Hauptschule bereits am Ende der 5. Klasse, während dieser Inhalt am Gymnasium erst zu Beginn der 6. Klasse im Lehrplan erscheint (KMBI 15/1977,S.515) Der gymnasiale Lehrplan für die 5. Klasse enthält stattdessen den Inhalt "Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches" (15/1977, S.513)

Die Lernziele der verschiedenen Niveaus unterscheiden sich z.T. erheblich in ihrem Intensitätsgrad. Einblick/Einsicht, Fähigkeit/Fertigkeit etc.
Drittens ist die Zeiteinplanung unterschiedlich.
Beispiel: KMBI 19/1976, S. 672 "Addition und Subtraktion von Bruchzahlen in dezimaler Schreibweise". Für das B-Niveau und für das A-Niveau werden 8 Stunden eingeplant, für das Gymnasium aber nur 3 Stunden (KMBI 15/1977, S. 519.)

Aus diesen Vorüberlegungen ziehe ich den Schluß, daß es sinnvoll ist, ein Curriculum für das B-Niveau zu konstruieren, d.h. allen drei Niveaus sollen die gleichen Lerninhalte zugeordnet werden.

Für das A- und G-Niveau kann man dann nach der Erprobung die Lernzielintensitäten entsprechend modifizieren. Die Zeiteinplanung werde ich ebenfalls von der Erprobung abhängig machen.

Aus der Mengenlehre kennen alle Schüler die Schnitt- und Vereinigungsmengenbildung und die Teilmengenbeziehung bereits seit der Grundschule. Begriffe wie Grundmenge und Lösungsmenge darf ich ebenfalls als bekannt voraussetzen.

In der 5. Klasse kann ich auf den Bruchbegriff nicht aufbauen. Das bedeutet für die Konstruktion des Curriculum, daß Lerninhalte wie 'relative Häufigkeit' oder 'Berechnen von Wahrscheinlichkeiten' erst für die 6. Klasse in Frage kommen.
Ich werde in der 5. Klasse aber sehr wohl mit qualitativen bzw. komparativen Wahrscheinlichkeiten die Lerninhalte der 6. Klasse vorbereiten können. (Vgl. die 7 Thesen von Heitele, S. 67)

In den geltenden Mathematikcurricula für die 5. und 6. Jahrgangsstufe werden in den Vorbemerkungen folgende Richtziele angegeben:

"1. Einblick in die Bedeutung und Anwendbarkeit der Mathematik in den Bereichen des täglichen Lebens
2. Freude am spielerischen und entdeckenden Umgang mit mathematischen Gegenständen
3. Fähigkeit, sprachlich klar und exakt zu formulieren
4. Fähigkeit, Symbole und Abkürzungen einer Fachsprache in ihrer Bedeutung zu erkennen und sie sinnvoll zu gebrauchen
5. Fähigkeit, folgerichtig zu denken
6. Fähigkeit, Sachzusammenhänge zu mathematisieren
7. Fähigkeit, sich geometrische Zusammenhänge anschaulich vorzustellen
8. Beherrschung von mathematischen Verfahren bei altersgemäßer Einsicht in deren grundlegende Gesetzmäßigkeit
9. Sicherheit im Umgang mit mathematischen Geräten."

(KMBl So-Nr. 4/1976 S. 87; KMBl So-Nr. 19/1976; KMBl So-Nr. 15/1977, S. 500)

Außer dem 7. Richtziel können allen anderen stochastische Inhalte zugeordnet werden.

Bei den sog. "übergeordneten Lernzielen, an deren Erreichung vor allem in Verbindung mit anderen Lernzielen im Verlauf der 5. und 6. Jahrgangsstufe wiederholt gearbeitet werden soll" (KMBl 4/76, S. 86f; KMBl 19/76, S. 667 und KMBl 15/77, S. 501) können vor allem bei "II. Sachaufgaben" und "III. Aussageformen und Mengen" stochastische Inhalte eingeordnet werden.

Ich nenne im folgenden die übergeordneten Lernziele des bayerischen Lehrplans, welche die Lernziele der beiden Teilcurricula umfassen sollen:

"II. 1. Fähigkeit, den mathematischen Sachverhalt in Textaufgaben zu erkennen und in mathematische Sprache zu übersetzen. ..

II. 2. Bereitschaft und Fähigkeit, geeignete Situationen zu mathematisieren und zu geeigneten mathematischen Vorgaben einen passenden Sachverhalt anzugeben.

III. 1. Fertigkeit im Darstellen von Mengen, Teilmengen, Schnitt-, Vereinigungs- und Restmengen (Schwerpunkt: Zahl- und Punktmengen)

III. 4. Einsicht in den Zusammenhang zwischen Grundmenge und Lösungsmenge bei Gleichungen und Ungleichungen."

Ebenso muß ich die Fortsetzbarkeit meiner Lernziele und Lerninhalte bis zur Oberstufe ins Kalkül mit einbeziehen. Ich muß also bedenken, daß "die intuitive Einführung" in die Stochastik auf dieser Schulstufe "nicht falsch oder irreführend" sein darf, "sondern nur unvollständig strukturiert. Sie darf die spätere strenge Behandlung nicht verbauen oder stören." (Engel 1966a, S. 5)
Das bedeutet in diesem Stadium der Planung, daß von vornherein die gleiche Nomenklatur verwendet wird. Zum Beispiel: Das Wort 'Ergebnis' verwende ich statt des Wortes 'Ausfall', das vielfach in Schulbüchern für die 5./6. Jahrgangsstufe zu finden ist, weil auch in der Oberstufe von Ergebnissen eines Zufallsexperimentes die Rede ist. (Vgl. ISP, Kollegstufe, Band IV, S. 150)
Eine einzige Ausnahme werde ich bei dem Begriff des Ergebnisraumes machen und hier von 'Ergebnismenge' sprechen, weil der Begriff der Menge den Schülern vertraut ist.

4.2.2. Zum gewählten Einstieg

Nach dem Studium der Fachliteratur bin ich zu dem Schluß gekommen, daß ein Einstieg über Häufigkeiten der gangbarste Weg ist. Schon Stender (1955, S. 274) forderte, daß "zweckmäßig von dem Begriff der 'relativen Häufigkeit'" ausgegangen werden sollte". Auch auf Kütting (1962, S. 40) möchte ich hier verweisen: "..Vielmehr wird man zunächst auf anschauliche Weise bei den Schülern eine Vorstellung des Begriffs Wahrscheinlichkeit wecken...Geeigneter aber scheint mir ein Rechnen mit relativen Häufigkeiten zu sein". Ähnlich Steinbring (1980, S.139): "Eine Möglichkeit zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, welche für eine konkrete Umsetzung im Mathematikunterricht jedoch weiterer Überlegungen und Untersuchungen bedarf, besteht darin, gezielt das jeweilige Verhältnis von Begriffsdefinition und Anwendungen und seine Differenzierungen im Auge zu behalten. D.h. man könnte etwa durchaus mit einem kombinatorisch begründbaren Wahrscheinlichkeitsbegriff, der zudem zur Herausbildung eines entwickelten Methodenapparates dient, beginnen. Dabei sollte man jedoch auch schon deutlich die E n t w i c k l u n g mit ihren Veränderungen berücksichtigen. Um den notwendigen Übergang von der kombinatorischen zur statistischen Wahrscheinlichkeitsauffassung zu erleichtern und für diesen schwierigen theoretischen 'Bruch' die erforderlichen mathematischen Methoden und Begriffe bereitzustellen, bietet sich in gewisser Weise die Erarbeitung eines intuitiven Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsverteilung durch die despriptive Statistik an; Wahrscheinlichkeitsverteilung repräsentiert nämlich in einheitlicher Weise die Komplementarität von Sicherheit und Exaktheit."
H.Schupp fordert ebenfalls eine "möglichst frühe und intensive Verschränkung wahrscheinlichkeitstheoretischer mit statistischen Betrachtungen. ... Statistik ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung ist blind (d.h. bringt keine wesentlichen Erkenntnisse), Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Statistik ist leer (d.h. verliert die Verbindung zur Wirklichkeit und deren aktuellen Problemen). So gehören beispielsweise zusammen:
relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit
Häufigkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsverteilung, .."
(Schupp 1979a, S. 300)

Auf diesem Weg habe ich nun die Möglichkeit, in der 5. Klasse beim Ordnen von Daten absolute Häufigkeiten zu ermitteln und bei Zufallsexperimenten die Kinder mit 'qualitativen bzw. komparativen' Wahrscheinlichkeiten auf eine systematischere Behandlung der Wahrscheinlichkeit vorzubereiten.
In der 6. Klasse leitet dann der Begriff der relativen Häufigkeit zum Begriff der Wahrscheinlichkeit über.
Ich kann so einen induktiven Weg zum Wahrscheinlichkeitsbegriff einschlagen, der vor allem für das B-Niveau unerläßlich ist.
"Beim konkret durchgeführten Zufallsversuch ergeben sich 'Sprechanlässe', die zu Vermutungen und Begründungen führen und schließlich zur Begriffsbildung 'Wahrscheinlichkeit'". (Jahner 1978, S. 229f)

4.2.3. Übergeordnete Lernziele für den Stochastikunterricht

H.Schupp formuliert als "Leitziel eines jeden Curriculum 'Stochastik' ... rationales Verhalten in stochastischen (d.h. von Zufalls- oder Massenerscheinungen bestimmten) Situationen." Ebenso stellt Schupp Teilziele auf, die "für jeden Lehrgang und jede Lehrgangsphase Geltung haben müssen. ... Unterschiedlich .. kann nur sein .. die Ebene, auf der die Ziele angestrebt werden.

a) eine stochastische Situation erkennen,
b) die stochastischen Bestandteile eines der Situation immanenten Problems isolieren und analysieren können,
c) durch stochastische Verfahren und Schlüsse zusätzliche Informationen gewinnen können,
d) das Problem mit geeigneten stochastischen Methoden lösen können,
e) sich gemäß den vorliegenden Daten, gewonnenen Informationen und errechneten Lösungen in der gegebenen Situation optimal verhalten können, und nicht zuletzt auch
f) den Gebrauch stochastischer Methoden durch andere sowie die zugehörigen Ergebnisse nachvollziehen bzw. verstehen und kritisch überprüfen können,
wobei folgende stochastische Methoden gemeint sind:
A) Übliche Maßnahmen der deskriptiven Statistik (Gewinn, Darstellung und Aufbereitung von Daten; Mittel- und Streuwerte).

B) Elementare Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung (primäre Wahrscheinlichkeiten, Wahrscheinlichkeiten durch Wahrscheinlichkeiten, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Markoff-Ketten, wichtige Verteilungen und deren charakteristische Werte).
C) Einfache Schlußweisen der Inferenzstatistik (Fehlerrechnung, Trendermittlung, Testen von Hypothesen, Umgang mit Stichproben." (Schupp 1979a, S. 299)

Diese übergeordneten Lernziele sind für die gesamte Sekundarstufe I formuliert worden.
In der 5. und 6. Jahrgangsstufe werden wegen der noch fehlenden Lernvoraussetzungen und natürlich auch wegen der zeitlichen Begrenzung des Lehrgangs nicht alle stochastischen Methoden zur Anwendung kommen können. Etwa Markoff-Ketten oder Testen von Hypothesen müssen den folgenden Klassen vorbehalten bleiben.

Ein Vergleich der Richtziele des bayerischen Curriculum (vgl. S. 76) und der Lernziele nach Schupp zeigt, daß letztere keinem der 9 Richtziele widersprechen und sie ohne weiteres z.B. unter "Einblick in die Bedeutung und Anwendbarkeit der Mathematik in den Bereichen des täglichen Lebens" oder "Fähigkeit, Sachzusammenhänge zu mathematisieren" subsumiert werden können.

4.2.4. Das verwendete Lernzielstufenmodell des Staats-Instituts für Schulpädagogik-München

Ich werde mich bei der Konstruktion des Teilcurriculum an das Lernzielstufenmodell von Klaus Westphalen halten, das im Staatsinstitut für Schulpädagogik , München (ISP 1974) entwickelt wurde und seither in allen bayerischen curricularen Lehrplänen verwendet wird.
Es werden im Fach Mathematik Lernzielstufen des Wissens/Verstehens und des Könnens unterschieden:
"Lernzielstufen des Wissens und Verstehens
a) Einblick in ..
Einblicke erwachsen aus einer ersten Begegnung mit einem

Wissensgebiet. Sie kennzeichnen zugleich einen Intensitätsgrad des Wissens, der als oberflächlich und bruchstückhaft zu bezeichnen ist, ohne daß damit eine Wertung verbunden werden darf....

b) Überblick über ...
Um sich einen Überblick über ein Wissensgebiet oder einen Themenkreis zu verschaffen, muß man in verschiedene Teilbereiche und Einzelprobleme Einblick gewonnen haben....

c) Kenntnis der ...
Kenntnis setzt den Überblick voraus, fordert aber zusätzlich einen Grad gedächtnismäßiger Verankerung, der zu einer genauen Beschreibung eines Sachverhalts befähigt. ..

d) Verständnis für ...
Verständnis setzt Kenntnis voraus, zugleich aber auch Einsicht in die Art des Vorgehens, in die Richtigkeit von Überlegungen, in die Gültigkeitsbedingungen eines Satzes bzw. in die Tragweite einer Theorie ...

e) Vertrautheit mit ...
Vertrautheit befähigt dazu, die erworbenen Kenntnisse und Einsichten so zu verarbeiten, daß sie selbständig auf ähnlich gelagerte Sachverhalte übertragen, aber auch auf andersartige Bereiche angewandt werden können....

Lernzielstufen des Könnens

a) Fähigkeit
Fähigkeit kennzeichnet das Vermögen, Aufgaben eines bestimmten Typs lösen, Sachverhalte richtig beschreiben, Kalküle zweckentsprechend anwenden oder Beweise schlüssig durchführen zu können.

b) Fertigkeit
Fertigkeit kennzeichnet ein durch intensives Üben erworbenes Routineverhalten bei der Ausführung häufig wiederkehrender Gedankenabläufe und Lösungsschemata.

c) Sicherheit bzw. Beherrschung
Sicherheit bzw. Beherrschung setzen eine gewisse Fertigkeit voraus, aber auch die nötige Vertrautheit mit den verwendeten Begriffen, Gesetzen und Verfahren."

(ISP, Band IV, S. 13f)

4.2.5. Vorüberlegungen zu den Unterrichtsverfahren

Unter Hinweis auf das Modell der Strukturanalyse des Unterrichts (Heimann/Otto/Schulz 1966), in dem sechs Strukturmomente "in ihrem Zusammenwirken Unterricht als absichtsvoll pädagogisches Geschehen" konstituieren, möchte ich nochmals kurz zusammenfassen, welche "Entscheidungsfelder" bzw. "Bedingungsfelder" ich bereits untersucht habe und welche jetzt noch einer Thematisierung bei der Erstellung meines Lehrgangs bedürfen.

Die anthropogenen und sozial-kulturellen Voraussetzungen habe ich in den vorhergehenden Abschnitten zu klären versucht. Ich glaube, ich habe im Sinne der lerntheoretischen Didaktik gezeigt, daß die in den fundamentalen Ideen elementarisierten Inhalte der Stochastik "in der gesellschaftlichen Gegenwart als zukunftsbedeutsam angesehen werden können (sozial-kulturellen Bedingungen entsprechen)", und daß sie "den Heranwachsenden dargestellt, vom Lehrer nahegebracht werden können (den anthropogenen Bedingungen genügen)." (Schulz 1966, S. 30)

Wenn ich nun die Konstruktion des Teilcurriculum in Angriff nehme, muß ich die Interdependenz der Entscheidungsfelder Intentionalität, Thematik, Methodik, Medienwahl im Sinne der lerntheoretischen Didaktik berücksichtigen.
Ich werde also bei jedem Lernziel, dem ich einen Inhalt zuordne, auch das Unterrichtsverfahren im Auge haben müssen. Um hierfür einen optimalen Ausgangspunkt zu schaffen, erörtere ich im folgenden einige wichtige Aspekte des Lehr- und Lernprozesses.

4.2.5.1. Lerntheorien und ihre Anwendbarkeit im schulischen Bereich

Da jeder Unterricht einen Lernzuwachs zum Ziel hat, erhebt sich die Frage, ob die Ergebnisse der Lernpsychologie als Erklärungen und Hilfen im schulischen Lernprozeß herangezogen werden können.
Innerhalb der Lernpsychologie gibt es unterschiedliche Richtungen, es besteht aber bei allen weitgehende Einigkeit darüber, was unter Lernen zu verstehen ist. Gage/Berliner

etwa formulieren so: "Lernen kann als Prozeß beschrieben werden, durch den ein Organismus sein Verhalten als Resultat von Erfahrung ändert" (S. 79). Je geringer die Instinktausstattung eines Organismus, desto größer die Notwendigkeit, die auftretenden Probleme durch Lernen zu bewältigen. Der Mensch als Organismus mit geringer Instinktausstattung kann sich also nur durch Lernen erfolgreich mit der Welt auseinandersetzen, sich in ihr zurechtfinden. Der Begriff 'Erfahrung' in obiger Definition weist darauf hin, daß Reifungsvorgänge und Veränderungen im Organismus, die z.B. durch Ermüdung oder irgendwelche Drogeneinflüsse zustandekommen, nichts mit dem eigentlichen Lernen zu tun haben. Der Psychologe will nur die Auswirkungen des Lernprozesses auf die Leistung feststellen; Faktoren wie die oben genannten werden bei lernpsychologischen Untersuchungen möglichst eliminiert.
Gage/Berliner unterscheiden nun "fünf verschiedene Formen der Erfahrung, die zu einer Verhaltensänderung in diesem Sinne führen und die als grundlegende kausale Faktoren des Lernens betrachtet werden" (S.97).

1. Respondentes Lernen (klassisches Konditionieren)

Lernen wird hier verstanden als eine Verknüpfung eines primär neutralen, sog. unkonditionierten Reizes mit einem konditionierten. Diese einfachste Lernart hat der russische Physiologe Iwan Pawlow in einer Untersuchung bei Hunden beobachtet. Auf dem Fundament dieser Lernart werden vor allem unwillkürliche Reaktionen erlernt, etwa Gefühle wie Angst oder Freude und emotionale Haltungen gegenüber Objekten und Personen. Respondentes Lernen "hilft uns unter anderem zu verstehen, wie Schüler Zuneigung und Abneigung gegenüber der Schule und einzelnen Unterrichtsfächern erwerben" (Gage/Berliner 1979, S. 97).

2. Kontiguitätslernen

Hier ist Lernen lediglich eine assoziative Kopplung eines Stimulus und einer Reaktion, ohne daß irgendwelche vermittelnde Variable zur Erklärung herangezogen werden. "Wir wollen hier ganz einfach feststellen, daß Menschen ihr

Verhalten ändern können als Resultat einer Erfahrung von zwei Ereignissen, die miteinander gekoppelt sind." (ebd. S. 85)
Im Unterricht ist etwa automatisches Auswendiglernen ein Beispiel für diesen Lerntyp. "Die Verwendung von direktem Kontiguitätslernen im Unterricht, obwohl oft langweilig, kann eine sehr wirksame Lernmethode sein." (ebd. S. 85)
Gage/Berliner nennen in diesem Zusammenhang die "Stereotypisierung (die Herausbildung stereotyper Wahrnehmungen und Beurteilungen von bestimmten Personen oder Personengruppen)... Wenn etwa in Filmen die Darstellung bestimmter Personen oder sozialer Gruppen ständig in der gleichen, klischeehaften Form erfolgt .... dann sind hier Bedingungen für die Stereotypisierung, das Lernen von Stereotypen, gegeben"(ebd. S. 86).
Hier wird von lernpsychologischer Seite erklärt, wie der sechste fundamentale Fehler beim intuitiven Umgang mit Wahrscheinlichkeit: Stichproben werden leichtfertig als zufällig d.h. repräsentativ angenommen und falsche Schlüsse daraus gezogen (vgl. S. 26), gelernt wird.
"Lehrer, die diese Stereotypisierung auf der Basis eines direkten Kontiguitätslernens kennen, sind in der Lage, das Unterrichtsmerkmal und ihr eigenes Verhalten daraufhin zu überprüfen und so der Übernahme von Stereotypen durch ihre Schüler vorzubeugen." (Gage/Berliner, S. 87)

3. Operantes Lernen (instrumentelles Lernen; Lernen durch Verstärkung)

Hier ist eine Verstärkung (etwa Lob und Anerkennung im menschlichen Bereich) die Ursache dafür, daß Situation und Verhaltensweise assoziiert werden. "Verstärkung als Konsequenz eines Verhaltens ist die entscheidende Variable beim operanten Lernen"(ebd. S. 87).
Bei vielen Tierversuchen konnte operantes Konditionieren experimentell analysiert werden. Als erster hat wohl B.F.Skinner operante Lernprozesse bei Ratten nachgewiesen. Diese Möglichkeit, eine Verhaltensweise durch Verstärkung zu erreichen oder durch ausbleibende Verstärkung zu löschen, wurde in der Erziehung schon immer angewendet. Die Lernpsychologie hat also hier weniger ein neues Prinzip entdeckt, als vielmehr zum besseren Verständnis vieler Situationen

beigetragen.
Skinner unterscheidet zwischen positiver Verstärkung, bei der ein Stimulus in die Lernsituation eingeführt wird (etwa ein Nahrungsangebot) und negativer Verstärkung, bei der ein bestimmter Stimulus entfernt wird (z.B. das Aufhören eines unangenehmen Geräuschs). (Vgl. Gage/Berliner, S. 103)
Desweiteren wird zwischen primärer Verstärkung, die sich stets auf die Erfüllung physiologischer Bedürfnisse bezieht, und sekundärer Verstärkung unterschieden. "Menschliche Individuen können durch positive sekundäre Verstärkung in ihrem Verhalten bekräftigt werden wie Geld, Lob, Noten oder die Erlaubnis, einen Film zu sehen.... Der Grundsatz für den Einsatz von operanten Konditionierungstechniken im Unterricht sollte daher sein: "Suche den adäquaten Verstärker" - mache die Stimuli oder Einflüsse ausfindig, die für einen bestimmten Schüler verstärkend wirken, für ein bestimmtes Verhalten in einer spezifischen Situation unter Berücksichtigung einer ausreichenden Verfügbarkeit und Praktikabilität dieser Verstärker." (Ebd. S. 104)

4. Lernen durch Beobachtung oder "observantes Lernen"

Neue Verhaltensweisen können auch allein durch Beobachtung gelernt werden. Bandura (1969) u.a. haben in Experimenten diese Lernart untersucht.
Im Zusammenhang mit den Auswirkungen von Fernsehsendungen auf das Verhalten von Kindern und Jugendlichen wurde dieser Lerntyp in der letzten Zeit besonders häufig analysiert.
"Die Wahrnehmungen eines Modells kann das Verhalten eines Beobachters in mindestens drei verschiedenen Formen beeinflussen: Erstens, ein neues Verhalten kann gelernt werden; zweitens, bereits erlerntes Verhalten kann ausgelöst werden; und drittens, das Auftreten von bereits erlerntem Verhalten kann gehemmt werden, oder bestehende Inhibitionen können gelockert werden." (Ebd. S. 90)
Je höher das Prestige des Modells eingestuft wird, umso nachhaltiger ist der Lernerfolg. Verstärkung kann hier stellvertretend den Lernprozeß des Beobachtenden beeinflussen, indem die Modellperson 'verstärkt' wird.

"Da Kinder eine große Anzahl anderer Personen beobachten, sollten wir bedenken, daß es sehr wichtig ist, sie mit erstrebenswertem Modellverhalten zu konfrontieren und ihren Kontakt mit unerwünschten Modellen zu reduzieren." (Ebd. S. 93)

5. Kognitives Lernen

In diesem von der gestaltpsychologischen Schule entwickelten Lernmodell werden die assoziationspsychologischen Standpunkte abgelehnt, da sie "keine ausreichende Grundlage für die Beschreibung und Erklärung von Prozessen darstellen, bei denen logische, rationale und nicht zufällige Beziehungen gelernt werden" (ebd. S. 95).
Dieses Modell ermöglicht es vor allem, die komplexen menschlichen Lernprozesse zu analysieren. Der Mensch muß, um zu lernen, nicht konditioniert werden oder ein Problem mit der Versuch- und Irrtum-Methode angehen. Er kann vielmehr auch durch einen Prozeß der kognitiven Umstrukturierung ein Problem lösen. Vertreter dieses Erklärungsmodells sind die Psychologen der sog. Berliner Schule: Wertheimer, Köhler, Koffka, Lewin u.a.
"Diese Form des Lernens kann sich als ein ausschließlich mentaler Prozeß vollziehen. Lernen besteht hierbei in einem Erkennen und Verstehen der Ereignisse in unserer Umgebung, in dem Erfassen eines Gedankens, das mit der Einsicht in den Zusammenhang von Elementen einer Lernsituation verbunden ist." (Ebd. S. 98) Dieses Modell heißt deshalb auch'Lernen durch Einsicht' und durch Einsicht Gelerntes kann nun auf andere Bereiche übertragen werden. "Nicht nur die gleiche Situation wird als solche einsichtig erkannt, sondern auch eine ähnliche oder vergleichbare Lage zeigt sich dem einsichtig Lernenden so, daß er unter ihren Faktoren ähnliche oder vergleichbare Beziehungen erkennen kann und dadurch das Ergebnis derersten Lernaktivität - eventuell in entsprechender Abwandlung - wieder anzuwenden in der Lage ist. Daher wird die Lösung neuer Lernprobleme um so leichter gefunden, je ähnlicher sich die Situationen sind. Erst im Bereich des einsichtigen Lernens gibt es also "exemplarisches" Vorgehen in der Schule!" (Correll 1961, S. 41f)

4.2.5.2. Zum Lernprozeß

Die zeitliche Folge ist bei vielen Lernformen gleich. Bredenkamp/Bredenkamp (1974) unterteilen den Lernprozeß in vier Phasen:

Reizsituation

Lernen

1. Vorbereitungsphase
   (Aufmerksamkeitsprozesse
   Wahrnehmungsprozesse
   Reizdiskrimination)
2. Aneignungsphase
   (Lernen im engeren Sinn)

Gedächtnis

3. Speicherungsphase
   (Kurzzeitspeicher
   Langzeitspeicher)
4. Erinnerungsphase
   (Abruf des gelernten
   und gespeicherten Materials
   Dekodierung)

beobachtete
Leistung

(S.616)

Phase 1 und 2 fassen sie unter dem Begriff 'Lernen' zusammen, Phase 3 und 4 unter dem Begriff 'Gedächtnis'."Alle vier Phasen können nicht direkt beobachtet werden, sie werden lediglich aufgrund der beobachteten Leistung oder Behaltensprüfung erschlossen. Damit wird gleichzeitig verständlich, daß 'Lernen', 'Behalten' und 'Erinnern' eng miteinander verbunden sind." (Bredenkamp/Bredenkamp 1974, S. 618)

In der Vorbereitungsphase wird ein Lehrer vor allem die Optimierung der A u f m e r k s a m k e i t seiner Schüler im Auge haben. Gage/Berliner führen vier Kategorien von Stimuli an, mit deren Hilfe Aufmerksamkeit konzentriert werden kann:

- Psychophysische Stimulus-Eigenschaften:

Etwa die Veränderung der Tonhöhe beim Sprechen vor der Klasse. Ebenso wirkt u.U. ein farbiges Diagramm oder die Unterstreichung bestimmter Wörter usw.

- Emotionale Stimulus-Eigenschaften

"Diese mögliche Quelle einer Aktivierung durch emotionale Stimulus-Eigenschaften legt nahe, im Unterricht lebendige Metaphern, emotionsgeladene Ausdrücke der Umgangssprache, usw. einzusetzen, um Orientierungsreaktionen der Schüler hervorzurufen." (Gage/Berliner, S. 135)

- Stimulus-Diskrepanz

"Abweichungen von Bekanntem oder Erwartetem sind mit dem Begriff Stimulus-Diskrepanz gemeint." (ebd. S. 135) Die Autoren führen einige Beispiele an, wie Lehrer im Unterricht von "aufmerksamkeitssteigernder Stimulus-Diskrepanz" Gebrauch machen könnten. Etwa "Komplexität als Abweichung von einem einfachen Kontext. So kann er etwa nach mehreren Additionen von zweistelligen Zahlen eine Additionsaufgabe folgen lassen, bei der fünfstellige Zahlen zusammengezählt werden sollen" (ebd. S. 135). Für Stimulus-Ambiguität führen Gage/Berliner folgendes Beispiel an: " ... wenn der Lehrer im Unterricht eine Landkarte mit vielen Details, aber ohne Städte, vorlegt, und er die Schüler raten läßt, wo sich Städte entwickelt haben könnten" (ebd. S. 35). Inkongruenz wird als dritte "spezifische Form von Stimulus-Diskrepanz" angeführt. "Wenn ein Lehrer einen 'Fliegenden Fisch' bespricht oder ein Säugetier, das Eier legt (also ein Schnabeltier), oder wenn er auf einen Schneesturm am Äquator (in den Anden von Ecuador) zu sprechen kommt, dann verwendet er Inkongruenz des Stimulus-Materials, um die Aufmerksamkeit von Schülern zu erwecken." (ebd. S. 135)

- Aufforderungsreize

"Aufforderungsreize ... sind verbale Stimuli mit einem Aufforderungs- oder Befehlscharakter, die mit hoher Wahrscheinlichkeit dazu führen, daß ein Individuum, an das sie gerichtet sind, der darin ausgedrückten Aufforderung nachkommt." (S.135)

'Halt' oder 'Achtung' sind verbale Stimuli mit Aufforderungscharakter. Die meisten Lehrer haben ein ganzes Repertoire von solchen Stimuli parat, um die Schüler auf wichtige Passagen aufmerksam zu machen.

Abschließend betonen Gage/Berliner allerdings auch, daß alle diese aufmerksamkeitserregenden Stimuli sparsam eingesetzt werden sollen. "Alle Möglichkeiten, Aufmerksamkeit zu wecken, haben ein Problem gemeinsam. Der Schüler kann sich mit der Zeit an Stimuli, die Orientierungsreaktionen hervorrufen, anpassen." (ebd. S. 136)

Im Laufe des Lernprozesses spielt in der dritten und vierten Phase das G e d ä c h t n i s eine wesentliche Rolle.
In der Gedächtnisforschung unterscheidet man zwischen Kurzzeit- und Langzeitgedächtnis. Informationen, die nur bis zum Kurzzeitgedächtnis gelangen, geraten wegen der begrenzten Kapazität dieses Speichers schnell wieder in Vergessenheit. Es sei denn, sie werden durch Wiederholung oder Weiterverarbeitung resistent gegen Vergessen gemacht und gelangen so in den Langzeitspeicher.
Im Langzeitgedächtnis gespeicherte Lerninhalte gehen zwar nicht mehr verloren, sie sind aber nicht jederzeit zugänglich. Die Prozesse der Speicherung und des Abrufs gespeicherten Wissens sind also zu unterscheiden. Wir alle kennen aus eigener Erfahrung Situationen, in denen wir genau wissen, daß wir z.B. einen Namen kennen, er liegt uns 'auf der Zunge', aber wir haben ihn im Moment nicht parat. Nach einiger Zeit fällt er uns dann schließlich ein.
Gage/Berliner gehen in diesem Zusammenhang auf einige Faktoren näher ein, die das Speichern und das Abrufen von gespeichertem Wissen erleichtern können.

G e d ä c h t n i s h i l f e n :

1. Bedeutungsgehalt des Lehrstoffes

"Der Bedeutungsgehalt eines Lehrstoffes läßt sich am besten durch die Anzahl der Assoziationen, die sich mit einer bestimmten Information verbinden, messen. Bedeutungshaltiges

Material besitzt einen hohen Bekanntheitsgrad oder es läßt sich in einer bestimmten Form logisch ordnen." (ebd. S. 142)

2. Vermittlungsglieder

Durch Vermittlungsglieder (Mediatoren) soll "ein Bedeutungszusammenhang zwischen vorher isolierten Elementen des Lehrstoffes" hergestellt werden. (ebd. S. 144)

3. Vorstrukturierung des Lernstoffes

Hier gibt man den Schülern vor der eigentlichen Behandlung eines Themas eine Übersicht, eine "Vorstrukturierung". "Durch die Vorstrukturierung sollte eine Art geistiges Gerüst vermittelt werden, das dem Schüler Anhaltspunkte für die nachfolgende Information bietet und ihren Aufbau erkennen läßt. Wenn wir die Unterrichtsstunde mit einer Vorstrukturierung des Lehrstoffes beginnen, erhöhen wir den Bekanntheitsgrad und Bedeutungsgehalt des Materials, das wir vermitteln wollen, und dadurch wird, wie wir gesehen haben, die spätere Abrufung dieses Materials aus dem Gedächtnis erleichtert." (ebd. S. 145)

4. Hierarchisch gegliederte Lernschritte

Diese Fragestellung ist von Gagné (1969) besonders intensiv thematisiert worden. Er kommt zu dem Resultat, daß eine Lerntyp-Hierarchie existiert und daß das Erlernen eines in dieser Hierarchie niedrigeren Lerntyps Voraedingung zur Erlernung eines höheren ist.
Signallernen ist die einfachste Lernart, auf die dann in acht Stufen Reiz-Reaktionslernen, Kettenbildung, Sprachliche Assoziation, Multiple Diskrimination, Begriffslernen, Regellernen und Problemlösen aufbauen. (Vgl. Gagné 1969, S. 51f)
Will man nun einen Lernprozeß optimieren, dann muß man diese hierarchische Struktur berücksichtigen und einen Lehrstoff entsprechend gliedern. Das bedeutet für den Lehrer auch, daß er sich über die relevanten Vorkenntnisse der Schüler Gedanken machen muß. Gagné untersucht im Anschluß an seine lerntheoretischen Ausführungen die Lernstruktur einiger Schulfächer, u.a. auch die des Mathematikunterrichts.

Anhand von Lerninhalten (z.B. anhand einer Lernstruktur für Zahloperationen) zeigt er auf, daß alle Lerntypen ihre ganz bestimmte Funktion in der gesamten Lernstruktur haben. (Vgl. Gagné, S. 143f)
In einer gut organisierten Lernfolge vollzieht also ein Schüler den jeweils nächsten Schritt erst dann, wenn er die Ziele der vorangegangenen Stufe erarbeitet hat.

5. Hierarchische Ordnung des Lernmaterials

Bower (1970) u.a. haben anhand einer Untersuchung gezeigt, daß die hierarchische Ordnung von Lernmaterial, d.h. eine hierarchische Gliederung der Informationen, die gelernt werden sollen, für gute Lern- und Erinnerungsleistungen ganz erheblich sind.
"Es ist offensichtlich, daß die Versuchspersonen, denen die geordneten Listen vorlagen, ungefähr dreimal so viele Wörter erinnern konnten wie diejenigen, denen die wahllos zusammengestellten Listen vorlagen." (Zitiert nach Gage/Berliner, S. 147)

6. Aktivitäten bei der Aufnahme von Lernmaterial

In diesem Zusammenhang wir in der lernpsychologischen Literatur von "mathemagenischem Verhalten" gesprochen. "Der Ausdruck 'mathemagenisches Verhalten' stellt ... eine Umschreibung für die Tatsache dar, daß Lehrstoff erst durch die Eigenaktivität des Schülers zu etwas Gelerntem wird, daß es letztlich der Schüler ist, der etwas 'Gelerntes hervorbringt'. Das Stimulus-Material, das in einem Schulbuch oder in einer Unterrichtsstunde durch den Lehrer vermittelt wird, stellt sozusagen nur einen 'nominalen Stimulus' für einen Lernprozeß dar; der 'effektive Stimulus' besteht immer nur in dem, was ein Schüler tatsächlich aufnimmt und verarbeitet." (ebd. S. 149)
Solche Aktivitäten können z.B. aktive Verbalisation des Lernmaterials oder körperliche Aktivitäten einschließlich auditiver, visueller und geschmacksbezogener Stimuli sein. Auch andere Aktivitäten, wie das Überlernen, d.h. das nochmalige Wiederholen von bereits Gelerntem, fördert die Gedächtnisleistung. "Das Überlernen kann eine langweilige und zeitraubende Angelegenheit sein, aber seine Auswirkungen sind

eindeutig. Das Sprichwort 'Übung macht den Meister' besitzt in diesem Zusammenhang ziemliche Gültigkeit, insbesondere dann, wenn das Üben verstärkt wird." (ebd. S. 154) Man denke nur an bestimmte Fertigkeiten, die man nie mehr verlernt, weil sie sehr lange immer wieder ausgeführt wurden. Ich denke hier an Schwimmen, Radfahren usw.

"Eine weitere wichtige Möglichkeit, Informationen abrufbar im Gedächtnis zu speichern, ist die assoziative Verbindung der Stimuli, die erinnert werden sollen, mit symbolischen Repräsentationen (vor allem in visueller und auditiver Form)." (ebd. S. 155) Auch räumliche Anhaltspunkt können den Abruf von gespeicherter Information erleichtern.

Alle diese Gedächtnishilfen sollten im Lernprozeß berücksichtigt werden und bereits bei der Gestaltung des Lernmaterials bedacht werden, sodaß die nötigen mnemonischen Hilfen mitgespeichert werden können.

4.2.5.3. Lerntransfer

Im dritten Abschnitt dieser Arbeit wurde der neue Inhalt Stochastik unter anderem auch damit begründet, daß er zur Bewältigung von Lebenssituationen im Robinsohnschen Sinne beitragen kann. Bedenkt man nun die Schnellebigkeit unserer Zeit und die daraus resultierenden, häufig veränderten Anforderungen, dann wird deutlich, daß zur Bewältigung von Lebenssituationen in den seltensten Fällen reine Reproduktionen des Gelernten erforderlich sind. Viel eher muß Gelerntes auf neue Situationen angewendet werden können. Der Erfolg der Schule wird heute mehr denn je an der Lernübertragung gemessen, die sie ermöglicht.

Von Transfer wird gesprochen, wenn sich zwei unterschiedliche Lernvorgänge gegenseitig beeinflussen. Erleichtert das Lernen von X den Lernprozeß Y, findet positiver Transfer statt; wird der Lernprozeß dagegen erschwert, spricht man von negativem Transfer. Beim Nulltransfer gibt es keine gegenseitige Beeinflussung.
Schon immer wurde im Unterricht versucht, einen Lernschritt

auf dem anderen aufzubauen und auch so, daß der vorhergehende den nachfolgenden nicht hemmt.
Die Bedeutung dieses 'vertikalen' Transfers erläutert Gagné wie folgt: "Die Feststellung, daß Transfer-Phänomene von vorausgehendem Lernen abhängen, ist von überragender Wichtigkeit. Pädagogische Autoren parlieren gelegentlich so enthusiastisch über die Bedeutung von Transfer, daß sie geneigt sind, diese Tatsache zu vergessen. Natürlich sind Unterrichtsbedingungen erstrebenswert, welche die Köpfe der Schüler 'weiten', zur 'Verallgemeinerung des Wissens ermutigen' und die Schüler 'auffordern, in neuartigen Situationen Probleme zu lösen'. Alle diese Feststellungen drücken das Ziel der Lernübertragung aus. Aber zunächst muß etwas gelernt sein, bevor es übertragen werden kann. Ein Schüler, der die Regeln über elastische Körper auf die Membranen eines lebenden Organismus übertragen soll, muß zunächst die Regeln über elastische Körper lernen. Eine der wesentlichen Voraussetzungen für Transfer ist Lernen". (Gagné 1969, S. 190)
Bei einem transferfördernden Unterricht müssen also besonders die Lernvoraussetzungen der Schüler beachtet werden. Nach Gagné kann man jede Lernaufgabe in Form einer Hierarchie darunterliegender Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten darstellen und im Unterricht ist dann zu fragen, was der Schüler wissen muß, um diese neue Aufgabe lösen zu können. (Vgl. auch S. 92)
Von lateralem Transfer spricht Gagné, wenn es gilt, Gelerntes auf ähnliche Situationen, die ungefähr auf dem gleichen Komplexitätsniveau liegen, zu übertragen.
Das Zustandekommen von Lerntransfer wurde in der Theorie der "formalen Bildung" durch die Existenz geistiger Kräfte erklärt, die durch die Beschäftigung mit entsprechenden Inhalten geübt und gefestigt werden. Der Latein- oder der Mathematikunterricht wurden als solche Inhalte betrachtet.
Seit Thorndikes Transferstudien (1913) wird diese Erklärung für das Zustandekommen von Transfer abgelehnt. Nach Ausubel (1968) ist entscheidend für Transferleistungen die kognitive Struktur des Lernenden.

F.E.Weinert (1974, S. 705f) nennt vier Gruppen von Bedingungen für Lernübertragung:
"a) Art und Ausmaß der Lernübertragung sind abhängig von den kognitiven Voraussetzungen des Lernenden, In einer Reihe von Untersuchungen konnte gezeigt werden, daß intelligentere Schüler im allgemeinen größere Transfereffekte erzielen....
b) Art und Ausmaß der Lernübertragung sind abhängig von der Ähnlichkeit zwischen Lern- und Transferaufgabe. ... Aufgabe des Unterrichts ist es, die Lernsituation im Hinblick auf die künftige Bewährungs- und Transfersituation zu planen. Hier liegt eines der wichtigen Probleme der Curriculumforschung.
c) Art und Ausmaß der Lernübertragung sind abhängig von der Auseinandersetzung mit der ursprünglichen Lernaufgabe."
Weinert nennt hier die Intensität der Übung und verweist vor allem auch auf das Überlernen. "Die Bedeutung des intensiven sinnvollen Übens gerade für das produktive Lernen und für kreative Lernübertragungen wird oft unterschätzt." Des weiteren empfiehlt er eine "Variabilität der Übung", um "Mechanisierungen" zu vermeiden.
Für die Bedeutung des einsichtigen Lernens im Zusammenhang mit Lernübertragung erwähnt er das berühmte Beispiel von Max Wertheimer (1964), wonach Schüler bei der Behandlung des Parallelogramms zum großen Teil verunsichert wurden, weil Wertheimer - nicht wie der Lehrer am Vortag - das Parallelogramm waagerecht an die Tafel zeichnete, sondern etwas schräg. "Wertheimer betont in diesem Zusammenhang, wie gefährlich einfaches Reproduzieren, blindes Anwenden von etwas Gelerntem, stückhaft verbissene Sorgfalt und das Vernachlässigen des Überblicks über das Ganze sein kann."
Der Umfang des entdeckenden Lernens erweist sich ebenfalls als transferfördernd. "Neben vielen anderen bemüht sich J.S.Bruner seit langem um den Nachweis, daß selbständig entdeckendes Lernen zu größeren Transfereffekten bei der Lösung neuer Aufgaben führt als sinnvoll rezeptives Lernen....
d) Art und Ausmaß der Lernübertragung sind abhängig von der Entwicklung allgemeiner und spezifischer transferfördernder Methoden. Der reflektierten, möglichst häufigen Erfahrung richtiger und falscher Lernübertragung kommt ebenso große

Bedeutung zu wie der Vermittlung effektiver Problemlösungsstrategien und positiver Einstellungen dazu. Für die produktive Anwendung dieser Strategien spielt offenbar das kritische Selbstvertrauen des Lernenden in seine Fähigkeiten eine große, in Forschung und Praxis häufig unterschätzte Rolle."

4.2.5.4. Motivation im Unterricht

Seit Unterricht institutionalisiert ist, wird nicht mehr nur freiwillig gelernt. Lernen erfolgt nicht mehr gelegentlich, sondern stetig und die Lernziele werden vorgegeben. Im Lehr- und Lernprozeß ist also die Frage, wie der Schüler motiviert werden kann, von besonderer Bedeutung. Dabei darf 'Einstieg' nicht mit Motivation gleichgesetzt werden. Motivation muß vielmehr im gesamten Unterrichtsprozeß ständig bedacht und gesichert werden.
Bevor ich auf Motivierungstechniken im Unterricht zu sprechen komme, werde ich im folgenden den Begriff Motivation kurz erörtern.
Die meisten Richtungen in der Psychologie befassen sich mit der Frage nach dem "Warum?" menschlicher Verhaltensweisen. Je nach Standort fällt ihre Antwort unterschiedlich aus. In einigen Theorien wird der Begriff Motivation nicht explizit thematisiert - etwa bei Piaget oder bei Skinner - und Kelly (1965) bezeichnet den Motivationsbegriff sogar als "irreführendes Konstrukt". Ich orientiere mich hier an dem Motivationsbegriff von H.Schiefele, der Kellys Ausführungen wie folgt begegnet: "In der Tat scheint mir Kellys Zweifel solange berechtigt, wie Motivation als bloß funktionaler Handlungsanstoß betrachtet wird. Sobald das Konzept aber thematisiert wird, sobald Motive als Bedeutungsdispositionen verstanden werden, gewinnt es seinen Unterscheidungswert zurück. Für die Erziehungswissenschaft z.B. ist wichtig (und selbstverständlich für erzieherische Praxis), ob Handlungsanstöße fremdbestimmend von außen kommen, oder ob der Mensch sich selbst als Ursache seines Handelns setzen kann. Es kann nicht gleich-

gültig sein, welche Beweggründe dem Handeln zugrunde liegen. Der Mensch entwickelt Vorstellungen darüber, welche Beweggründe es sein sollen. Darin kommt zum Ausdruck, daß er notwendigerweise wertet. Das gilt für sein eigenes Handeln und für die Bedingungen, von denen sein Handeln abhängt. Die Werthaftigkeit menschlichen Handelns veranlaßt den Erziehungswissenschaftler, auch über Maßnahmen nachzusinnen, wie die wünschenswerten Motive erlernt werden können." (1974, S. 451 f)
Der Begriff Motivation ist schwer abzugrenzen. Er wird deshalb häufig mit anderen mitbestimmenden Ursachen verknüpft, die auf die Energie und die Richtung von Verhalten einwirken, wie Antrieb, Interesse, Bedürfnis usw. "Motivation begründet den Einsatz von körperlicher und psychischer Energie, Ausdauer trotz Müdigkeit und Hindernissen, Richtung und Ordnung des Handelns." (ebd. S. 434)
Ein Schüler, der einem Fach Interesse abgewinnen kann, wird sicher auch aufmerksam dem Unterricht folgen.
Bedürfnisse, etwa nach Leistung, wird ein Schüler befriedigen, indem er sich bemüht, ein gestecktes Ziel zu erreichen.
Ohne Motivation ist Verstärkung nicht möglich.
"Verstärkung - eines der wichtigsten Erklärungskonzepte der Lerntheorie - ist dem Begriff der Motivation polar zugeordnet... Das Verhalten eines Lebewesens kann auf so vielfältige Weise bekräftigt werden, wie seine Motive vielfältig sind."
(ebd. S. 434)
Motivation ist also auch bestimmend für die Zielorientierung und die Beständigkeit bei der Verfolgung eines Ziels.

Insgesamt kann man nach Schiefele Motivation folgendermaßen beschreiben: "Motivation ist ein hypothetischer Begriff zur Erklärung der gesteuerten Dynamik des Verhaltens, der Erwartung von Handlungsfolgen und der gefühlhaften Besetzung von Absichten. Motivationen sind Abstraktionen aus dem Sinnzusammenhang der immer schon gegebenen Aktivität des Menschen. Sie sind vielfältig voneinander zu unterscheiden nach Ursprung, Richtung, Funktionsverlauf, Bewußtseinsgrad. Psychische Vorgänge, die wir mit folgendem Namen bezeichnen, sind Motivationsprozesse: Antrieb, Strebung, Bedürfnis, Trieb, Tendenz, Drang, Wille, Wunsch, Absicht." (ebd. S. 456)

Motivation als Erklärungskonzept für unterschiedliches Verhalten bzw. unterschiedliche Leistungen von verschiedenen Schülern in ein- und derselben Situation ist für den Erzieher sehr wichtig und nützlich. Ein Schüler mit wenig Lernmotivation in einem bestimmten Fach braucht viel Betreuung und Hilfe, während ein hochmotivierter Schüler wenig Ermunterung und kaum Strukturhilfen durch den Lehrer benötigt.
Gage/Berliner schreiben in diesem Zusammenhang: "Selbst unvollkommenes Wissen über die Bedürfnisse Ihrer Schüler nach sozialer Anerkennung, sozialer "Macht" oder Gruppenzugehörigkeit und sozialem Anschluß können Ihnen eine Hilfe sein, einige Bereiche ihres Unterrichts zu individualisieren und die unverwechselbaren Bedürfnisse Ihrer Schüler in Betracht zu ziehen. Für den einen wollen Sie ein höheres Maß an sozialer Verstärkung erreichen; von einem anderen vielleicht Gruppenarbeit verlangen; und mit einem Dritten wollen Sie vielleicht über die Art reden, mit der er sich bei anderen unbeliebt macht." (1979, S. 504)

In der Motivationstheorie wird zwischen intrinsischer und extrinsischer Motivation unterschieden. Intrinsische Motivierung ist sachbezogene, sachimmanente Motivierung, d.h. die Tätigkeit selbst befriedigt. "Bei intrinsischer Motivation liegt der Sinn der Handlung in der Handlung selbst.... Intrinsische Motive bedeuten, daß ein Verhalten um seiner selbst willen in Gang gesetzt wird. Sie ermöglichen vollzugsbedingte Selbstbekräftigung. Intrinsische Motivation setzt Anpassungs- und Erwartungsstandards voraus. Personale Verursachung ist immer intrinsisch." (Schiefele 1974, S. 164)

Motivierungsmöglichkeiten im Unterricht

Obgleich die Motivationsforschung und die Erziehungswissenschaft insgesamt noch weit davon entfernt sind, die komplexen Situationen des Unterrichtsprozesses bis ins letzte analysieren und deuten zu können, gibt es doch **gesicherte Befunde**, die zulassen, Empfehlungen für pädagogisches Handeln auch bezüglich der Motivierung im Unterricht zu geben.
Bei meinen Ausführungen werde ich nicht auf u.U. wünschenswerte grundlegende Änderungen eingehen, die Lernbereitschaft

in der Schule verbessern könnten, sondern nur auf einige heute einsetzbare Techniken zu sprechen kommen.

1. Soziale Motivationen

"In vielen Fällen ist eine materielle Verstärkung weniger wichtig als das verbale Lob des Lehrers. Das relativ einfache Mittel, Äußerungen wie 'gut', 'großartig', 'sehr schön' und 'gute Arbeit', kontingent nach angemessenen Leistungen oder nach Annäherung an angemessene Leistungen anzuwenden, ist eine wirkungsvolle Motivationsmöglichkeit. ... Es scheint außer Zweifel zu sein, daß soziale Anerkennung einen starken Einfluß auf das Leistungsverhalten von Schulkindern ausübt." (Gage/Berliner 1979, S. 5241)
Hier wird der Führungsstil des Lehrers angesprochen, das angstfreie Klassenklima, das er aufzubauen versteht, die emotionale Zuwendung, die er den Schülern geben kann und wieweit er gruppendynamische Kenntnisse einsetzt und auch an die Schüler weitergibt. H.Schiefele bemerkt zum letzten Punkt: "Der Status des Schülers in der Lerngruppe bestimmt seine Lernbereitschaft mit. Daraus ergibt sich für den Lehrer die Aufgabe, gruppendynamische Prozesse und Gruppennormen im Hinblick auf die gemeinsame Lernaufgabe indirekt zu beeinflussen." (1974, S. 444)

2. Motivation durch Diskrepanzerlebnisse

Unter Punkt 4.2.5.2. -Zum Lernprozeß - habe ich bereits erläutert, mit welchen Mitteln man die Aufmerksamkeit seiner Schüler besonders wecken kann. U.a. war dort die Rede von der Stimulus-Diskrepanz, d.h. Abweichung von Bekanntem oder Erwartetem. (Vgl. S. 90) Mit Stimuli dieser Art, etwa Neuigkeit, Überraschung, Komplizierung, Verfremdung, Provokation usw. kann man Schüler immer wieder sehr fesseln. "Ein möglicher Zugang zum Lerngegenstand kann über die Anreizqualitäten des Unbekannten, Unerwarteten, Rätselhaften, über die Erlebnisformen des Staunens und Stutzens eröffnet werden." (Schiefele 1974, S. 404)

5. Motivation durch den Gegenstand selbst und seine Bedeutung für das spätere Leben

Jeder Lehrer kennt wahrscheinlich ähnliche Schülerfragen wie "Wofür soll das gut sein?", "Wann kann ich denn das brauchen?" usw. In vielen Phasen des Mathematikunterrichts werden solche Fragen besonders oft gestellt.
Diese Fragen zeigen, daß Schüler über die Bedeutung des Inhalts für ihr späteres Leben motiviert werden können und daß der Lehrer durch eine entsprechende Zielangabe einen Motivationsprozess in Gang setzen kann. Im Stochastikunterricht ist dies besonders gut möglich. "Wo immer es gelingt, die Lebensdienlichkeit von Gelerntem aufzuzeigen, wird die Aufgabe bedeutsam. (Sprachen, Mathematik, Kulturtechniken). Der Anreizwert von Lerninhalten steigt, wenn ihre Bedeutung für Menschen allgemein zum Leitfaden ihrer Erschließung wird (historische, geographische, soziale, politische Sachverhalte), und wenn man den möglichen Einfluß auf menschliches Dasein mitbedenkt (Naturwissenschaft, Technik, Kunst)." (Schiefele 1974, S. 427)

Motivierend wirkt aber auch schon, wenn bereits Gelerntes angewendet werden muß. Es wird so "die Erwartung geweckt, daß das, was gerade gelernt wird, später gebraucht wird. Bei einem Lernen, das gerade stattfindet, sollte man sich nicht darauf beschränken, nur die für dieses Lernen erforderlichen Informationen zu geben. Wo immer möglich, sollte man auf früher vermittelte Tatsachen, auf früher erworbene Konzepte und Prinzipien zurückgreifen." (Gage/Berliner 1979, S. 337)
Im Mathematikunterricht ist diese Empfehlung gar nicht zu umgehen, da hier die Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten zum großen Teil turmartig aufeinander aufbauen.

Mögliche Anreize durch einen mathematischen Gegenstand sind etwa die Freude an der heuristischen Denktätigkeit, die bei einer Aufgabenlösung zu erwarten ist oder die Neugier, der Antrieb, den Clou bei einer Knobelaufgabe zu finden, oder die ästhetische Freude über die Struktur und die Gesetze in den verschiedenen mathematischen Bereichen.
Für die Stochastik spricht zusätzlich die Möglichkeit, Spiele und Experimente (auch Gedankenexperimente) im Unterricht einzubauen und Situationen aus der Umwelt in ein mathematisches

Modell zu übertragen.
Alle Schüler einer Klasse gleichermaßen motivieren zu wollen, ist sicherlich ein vergebliches Unterfangen. Andererseits muß man einen Gegenstand erst kennenlernen, um vielleicht Gefallen an ihm zu finden, deshalb möchte ich hier mit einer Bemerkung von Ausubel schließen und gleichzeitig auf den folgenden Abschnitt, der sich mit Lehrmethoden beschäftigt, überleiten: "Die beste Methode, einen unmotivierten Schüler zu unterrichten, ist häufig, seinen gegenwärtigen Motivationsstand zu ignorieren und sich darauf zu konzentrieren, ihn so effektiv wie möglich zu unterrichten." (1974, S. 404)

4.2.5.5. Lehrtheorien

Lehren heißt nach W. Schulz "absichtsvolle Lernprozesse einleiten, fördern oder korrigieren, um Einsichten, Erlebnisse, Verhaltensmuster schnell, lückenlos und sicherer, mithin ökonomischer, lernen zu lassen, als das bloße Miterleben in Natur und Gesellschaft dies gestatten würde"(1969,S. 18).

Nun ist zu fragen, wie Lernprozesse in jeweils verschiedenen Situationen optimal vom Lehrer initiiert und gestützt werden sollen und zwar entsprechend den Erkenntnissen der psychologischen Forschung. Lassen sich Lehrtheorien z.B. aus den sehr weitgehend fundierten Lerntheorien einfach deduzieren?
Gage hat seine Einwände in eine Analogie gekleidet:
"...Bauern müssen einiges darüber wissen, wie Pflanzen wachsen, wie sie abhängen vom Boden, dem Wasser und dem Sonnenlicht. So müssen auch Lehrer wissen, wie Kinder lernen und wie sie abhängen von der Motivation, von den Lernvoraussetzungen und von Lohn und Strafe. Aber die Bauern müssen auch wissen, wie man das Land bestellt, wie man den Boden pflügt, sät, sich Unkraut und Insekten von Leibe hält, die Ernte einbringt und sie auf den Markt bringt. Wenn unsere Analogie auch nur in etwa zutrifft, müssen ähnlich auch Lehrer wissen, wie sie zu unterrichten haben, wie man die Schüler motivieren kann, ihre Lernvoraussetzungen beurteilt und von dieser Einschätzung ausgeht, wie man einen Stoff darbietet und wie kognitive Strukturen aufgebaut werden.... Theorien des Lehrens würden ausdrücklich

darstellen, wie sich Lehrer verhalten, warum sie sich so verhalten und welches die Wirkungen dieses Verhaltens sind. Also müssen Theorien des Lehrens gleichberechtigt neben Theorien des Lernens entwickelt werden" (Gage, 1972, S. 91).

Nach Loser/Tenhart (1977) unterscheiden sich Lehrtheorien vor allem wegen der Zeitbegrenzung, in der Lehren erfolgt, wegen der vorgeschriebenen Inhalte, die vermittelt werden müssen und wegen des größeren sozialen Zusammenhangs, in dem Lehren stattfindet.
Die Phänomene Lehren und Lernen sind also nicht kongruent und Unterricht läßt sich nicht auf angewandte Psychologie zurückführen.
Bruner (1974) erwartet von einer Lehrtheorie, daß sie präskriptiv sei, d.h. daß sie Regeln für den optimalen Verlauf angeben kann. Im einzelnen fordert er von einer Lehrtheorie:

- Methoden für die genaue Bestimmung der individuellen Voraussetzungen für Lernen (Praedispositionen)
- Methoden für die Strukturierung größerer Wissensbereiche, um dem Lernenden so weitestmöglich entgegenzukommen
- Methoden, die die Phasen definieren, in denen sich Lernen am wirksamsten vollzieht
- Methoden, welche die Art und den Einsatz von Bekräftigung im Lehr- und Lernprozeß regulieren helfen.

Eine umfassende Lehrtheorie gibt es bisher nicht und es ist auch nicht abzusehen, wann dies der Fall sein könnte.
Die Forderungen von Bruner zeigen die ganze Komplexität, mit der die Erziehungswissenschaft konfrontiert ist. Meines Erachtens wird man nicht eine einzige übergeordnete Theorie zu entwickeln haben, sondern für die unterschiedlichen Formen des Lernens verschiedene Theorien des Lehrens aufstellen müssen. (Für die Umsetzung in die Praxis erfordert das aber eine hohe didaktische Kompetenz des zukünftigen Lehrers.)

Im folgenden führe ich vier Lehrmodelle auf, die sich in der letzten Zeit aus vielen anderen besonders prägnant herauskristallisiert haben.

In diesem Zusammenhang nennt I.Hinz (1976) folgende Modelle: Das Modell der Verhaltenskontrolle, das Modell des Entdeckungslernens, das Vernunftmodell und Carrolls Modell "Lernerfolg für alle".

1. Das Modell der Verhaltenskontrolle

Dieses Modell besteht aus vier Schritten:
- "der genauen Definition des Zieles;
- der Bestimmung des Ausgangszustandes beim Individuum;
- dem kontrollierten Einsatz von Maßnahmen zur Änderung von Verhaltensweisen;
- der Überprüfung des Erfolges eines solchen Änderungsversuches." (S. 34)

"Allgemein könnte man dieses Modell als Reiz-Reaktions-Darstellung des Lehrens bezeichnen." (ebd. S. 34)
Zu den Maßnahmen zur Änderung des Verhaltens gehören etwa positive und negative Verstärkung, Beobachtungslernen oder Löschung.
Ziel dieses Modells ist es, "den Verlauf des Lehrens kontrolliert zu gestalten, ... Untersuchungen haben gezeigt, daß Lehrer, die viele positive Verstärker .. verteilen, bei ihren Schülern beliebt sind. Es ist bekannt, daß die Lieblingsfächer von Schülern in der Regel die sind, in denen sie beliebte Lehrer haben. Möglicherweise wird über diesen Umweg eine intrinsische Motivation beim Schüler für gerade dieses Fach hervorgerufen." (ebd. S. 42)
In den USA hat Homme diese Methode auch im üblichen Klassenunterricht mit Erfolg angewendet.(Vgl. Homme, 1976 bzw. Gage 1979, S. 110f)

2. Das Modell des Entdeckungslernens

"Die Anhänger des Entdeckungslernens weisen darauf hin, daß das "Vorsagen" neuer Problemlösungswege durch den Lehrer nicht Bestandteil des Lehrens sein sollte, weil es sich als schädlich erweisen könnte, wenn die Schüler noch nicht entsprechend vorbereitet worden sind." (Hinz 1976, S. 38)
Wissen, erworben durch selbstentdeckendes Lernen ist resistenter gegen Vergessen, da der Schüler neben einem Inhalt auch die angewendete Methode lernt. K. Riedel (1973) unterscheidet

zwei Instruktionshilfen zum entdeckenden Lernen, nämlich problemorientierte und ergebnisorientierte. Aufgrund einer Untersuchung stellte er fest, "daß die um Organisierung und Strukturierung des Lernprozesses bemühten problemorientierten Hilfen bei ähnlichen Aufgaben zu erheblich höheren Transferleistungen befähigen als die zum analytischen, schlußfolgernden und prüfenden Denken weniger herausfordernden ergebnisorientierten Hilfen." (S. 295)
Problematisch ist bei dieser Lehrform der sehr viel höhere Zeitaufwand, sodaß hier ihre Grenzen im täglichen Unterricht liegen.

3. Das Vernunftmodell

"Diesem Modell liegen bestimmte Annahmen zugrunde. Der Mensch wird als ein vernunftbegabtes Wesen (rational being) angesehen, dessen Verhalten nicht vollständig unter Rückgriff auf Begriffe verstanden werden kann, die sich mit tierischen oder mechanischen Existenzweisen verbinden. ... Vernunft beinhaltet eine moralische Aussage darüber, wie der Mensch behandelt werden darf. .. Die Sprache hat die Schlüsselrolle im Lehrprozeß zu spielen, da sie so enge Beziehungen zum Denken und zur Vernunft hat." (Nuthall/Snook 1977, S. 60)
Lehren ist hier ziel- und zweckbestimmtes menschliches Handeln, das die Vernunft der Schüler anspricht. "Der Lehrer hat sich dem unabhängigen Urteil des Schülers zu stellen. Verhaltensänderungen allein bedeuten noch nicht, daß Lehren stattgefunden hat. Die Änderungen müssen mit Absicht und mit den Mitteln der Vernunft herbeigeführt worden sein. ... Der Lehrer hat erfolgreich gearbeitet, wenn der Schüler seine Überzeugungen und Handlungsweisen begründen kann." (Hinz 1976, S. 43)

4. Carrolls Modell "Lernerfolg für alle"

Nach Carrolls (1972) Auffassung hängt der Lernerfolg eines Schülers von fünf Kriterien ab:

- der Begabung
- der Fähigkeit, Lehrangebote aufzunehmen
- der Qualität des Unterrichts

- der Ausdauer des Lernenden
- der zugestandenen Lernzeit.

"Vor allem muß der Lehrer die Vorstellung eines einheitlichen Unterrichts für alle aufgeben. In den meisten Fällen bedeutet dies, daß der Lehrer radikal jene Menge an Zeit reduzieren muß, die er vor der Klasse stehend verbringt, während der er zur ganzen Klasse spricht und von jedem Schüler verlangt, im gleichen Tempo dem vorgeschriebenen Gange zu folgen. In den meisten Fällen bedeutet dies, daß auch das Unterrichtsmaterial so verändert werden muß, daß jeder Schüler die Möglichkeit erhält, individuell oder in kleinen Gruppen genau mit jenen Lernmaterialien zu arbeiten, die seinen Bedürfnissen entsprechen. Eine beiläufige Konsequenz ist, daß jedem Schüler auch mehr Verantwortung für die selbständige Steuerung seiner Lernprozesse gegeben werden muß. Dies ist auch wegen der Entwicklung von Selbstvertrauen gegenüber späteren Lernaufgaben in hohem Maße wünschenswert." (S. 10)

In der Bundesrepublik gibt es Untersuchungen unter dem Titel "Adaptiver Unterricht", die mit Carrolls Idee verglichen werden können. (Vgl. Schwarzer/Steinhagen 1975)
"Für einen adaptiven Unterricht ist der Interaktionsansatz von großer Bedeutung. Alle anderen Ansätze gingen nämlich mehr oder weniger ausdrücklich von der Annahme aus, daß es die eine ideale Methode geben müsse, die einen Lernverlauf ohne Lernschwierigkeiten für alle Schüler garantieren könne. Aufgrund der Einsicht in die Fragwürdigkeit einer solchen Annahme hat die Unterrichtsforschung nach Wechselwirkungen zwischen Schülermerkmalen und Unterrichtsmethoden gesucht...." (Schwarzer 1976, S. 155)

Salomon (1975) unterscheidet in diesem Zusammenhang drei Modelle:

a) das remediale Modell zur Beseitigung von Fähigkeitsmängeln
b) das kompensatorische Modell zum Ausgleich von Fähigkeitsmängeln
c) das Präferenzmodell zur Bevorzugung von Fähigkeiten.

Das erste Modell ist an einer "kumulativen Organisation des Unterrichts orientiert. Nur wenn der Lernprozeß besonders

auf vorausgesetzten intellektuellen Fähigkeiten beruht und entsprechend sequenziert ist, läßt sich das Modell anwenden. Das scheint bei einem großen Teil des schulischen Lernens der Fall zu sein." (Schwarzer 1978, S. 156)

Das kompensatorische Modell will als Korrektiv von Fähigkeitsdefiziten fungieren. Zusätzliches Material und Lernhilfen durch den Lehrer werden eingesetzt.
Dieses Modell ist für sehr intelligente Schüler nicht geeignet.

Im Präferenzmodell werden besondere Fähigkeiten im Lernprozeß ausgenützt. ".. verbalintelligente Schüler erhalten sprachliche Informationen; 'visuelle Typen' erhalten figurales Lehrmaterial. Defizite werden weder berücksichtigt noch ausgeglichen." (Schwarzer 1978, S. 156)

In dieser "differentiellen Didaktik" wird in "erster Linie von den individuellen Unterschieden zwischen Schülern im Hinblick auf Lernprozesse" (ebd. S. 170) ausgegangen. Es wird nicht als sinnvoll angesehen, "noch länger nach einer optimalen Lehrmethode für alle Schüler zu suchen." (S.169)

4.2.5.6. Folgerungen für die Unterrichtsverfahren des Teilcurriculum

Mit dem bis hierher gesammelten Wissen über den Lehr- und Lernprozess können jetzt m.E. im Teilcurriculum den diversen Lernzielen und Lerninhalten die entsprechenden Vorschläge für Unterrichtsverfahren zugeordnet werden bzw. alle drei Phänomene können miteinander in Wechselwirkung treten.
Im folgenden fasse ich kurz zusammen, was bei der unter Punkt 4.3. schließlich folgenden Konstruktion des Curriculum hinsichtlich der Unterrichtsverfahren und im Schulzschen Sinne der Interdependenz auch hinsichtlich der Intentionen und Themen bedacht werden muß und erläutere einige didaktische Prinzipien, die sich in der mathematikdidaktischen Diskussion etabliert haben.

Motivation

Der Schüler muß jeweils auf den neuen Lerninhalt vorbereitet, für ihn motiviert werden. Das bedeutet, daß zu Beginn jeder Lerneinheit Aufmerksamkeit und Interesse durch geeignete Problemstellungen geweckt werden müssen.
Ebenso wird darauf zu achten sein, daß auch in den übrigen Phasen des Unterrichtsprozesses Motivierungsmöglichkeiten eingeplant werden. Zum Beispiel kann der "Anreizcharakter" von Medien (Schiefele 1974, S. 421) hier Beiträge leisten; es werden also geeignete Vorschläge zum Medieneinsatz anzugeben sein.

Lernvoraussetzungen

Die relevanten Vorkenntnisse müssen bei den jeweiligen Lernzielen berücksichtigt werden und es wird darauf zu achten sein, daß die Lernschritte folgerichtig aufeinander aufbauen.
Im allgemeinen wird es in dieser Altersstufe sinnvoll sein, von der Erfassung von Sachverhalten durch eigene Handlungen, über die Erfassung durch Bilder und graphische Darstellungen zur Erfassung durch Verbalisierung und Symbolisierung zu gelangen. Bruner (1974, S. 16f) unterscheidet in diesem Zusammenhang drei Darstellungsebenen (Repräsentationen), auf denen sich Umwelterschließung vollzieht: die enaktive, die ikonische und die symbolische Darstellung. Alle drei Ebenen werden in der Lehrgangskonzeption zu berücksichtigen sein. (Bei den Unterrichtsprinzipien gehe ich auf die Bruner'sche Einteilung nochmals ein)

Übung

"Regelmäßige, verteilte und möglichst variable Übung ist eine Voraussetzung für den langfristigen Lernerfolg" (Weinert 1974, S. 822).
Möglichkeiten für den Einschub von Übungsphasen werden ein wesentliches Moment im Lehrgang sein müssen, um die neuen Aufgabenstellungen zu festigen. Dabei sollten die drei Darstellungsebenen (nach Bruner) variiert werden und Wert auf sinnbezogenes Üben gelegt werden, dessen Ziel "nicht ein Automatismus, sondern die klarer aufgefaßte, bewegliche Operation ist." (Aebli 1961, S. 99)

Methodenvielfalt

Aus den Untersuchungen der pädagogischen Psychologie kann man den Schluß ziehen, daß es keine umfassende Unterrichtsmethode gibt, die für alle Situationen und für alle Schüler gleich optimal wäre.
Je nach Lernphase werden also die Aktions- und Organisationsformen unterschiedlich zu planen sein. Erarbeitende Unterrichtsverfahren im Wechsel mit darbietenden. Entsprechend werden auch die Organisationsformen variieren zwischen Frontalunterricht, Einzel-, Partner- und Gruppenunterricht.
Frontalunterricht bei allgemeinen Informationen und Demonstrationen; Gruppen- und Partnerarbeit beim Problemlösen und Einzelarbeit vor allem in den Phasen der individuellen Übung und Vertiefung.
Eine so zustandekommende Rhythmisierung des Unterrichts fördert wiederum Aufmerksamkeit und Lernbereitschaft.

Ebenso sollen die Veranschaulichungsmittel und die benutzten mathematischen Modelle variiert werden, um stereotypes Verhalten und Mechanisierungen zu vermeiden.

Transfer

Die Ermöglichung positiven vertikalen Transfers im Gagnéschen Sinne wird vor allem von den folgerichtig und vollständig konzipierten Lernschritten abhängen und ebenso davon, ob genügend viele Übungs- bzw. Überlernmöglichkeiten eingeplant wurden.

Zum positiven lateralen Transfer schreibt Gagné: "Je breiter eine erlernte Leistungsfähigkeit fundiert ist, umso größere Chancen bietet sie für den Transfer auf neue, unterschiedliche Situationen" (1969, S. 189). Das bedeutet etwa, den Kontext einer stochastischen Sachaufgabe möglichst häufig zu variieren oder die Veranschaulichungsmodelle immer wieder zu wechseln usw. (Vgl. auch die Transferbedingungen von Weinert auf S. 96)

Medien

In der lerntheoretischen Didaktik wird die Medienwahl wegen ihrer aktuellen Bedeutung gesondert thematisiert, während sie sonst zu den unterrichtsmethodischen Entscheidungen gezählt wird. In diesem Curriculum werden vor allem verschiedene

Unterrichtsmaterialien, wie Legosteine, Würfel, Münzen, Spielsteine, Kugeln, Reißnägel usw. eine Rolle spielen, mit denen die Schüler auf der enaktiven Darstellungsebene arbeiten sollen.

In den 6. Klassen wird eine Unterrichtsstunde im Institut für Unterrichtsmitschau - München auf Videoband aufgenommen werden.

Lernzielkontrolle

Am Ende der beiden Teilcurricula wird in Form einer üblichen Schulaufgabe eine Lernzielkontrolle einzuplanen sein, um den gesamten Lernzuwachs zu prüfen.
Davon abgesehen muß im ganzen Verlauf des Lehrgangs den Schülern immer wieder ihr eigener Lernfortschritt vor Augen geführt werden. Das kann durch Aufgabenvariation geschehen, aber auch durch Wiederholung und Zusammenfassung der Inhalte einiger Unterrichtsstunden.

Didaktische Prinzipien

Die Mathematikdidaktik hat nun - vor allem im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts - etliche Unterrichtsprinzipien aus den verschiedenen psychologischen und pädagogischen Theorien und Erkenntnissen abgeleitet, die sich im Unterricht schließlich auch bewährt haben.
Quelle dieser Ableitungen ist beinahe immer die Piagetsche Theorie, die sich durch ihre kognitive Orientierung auch besonders anbietet.
Zech (1977) hat eine Zusammenstellung didaktischer Prinzipien bezüglich des Mathematikunterrichts vorgelegt:

"- Prinzip der Stufengemäßheit (nach Piaget)
- Aufbauprinzip und Dynamisches Prinzip (nach Dienes)
- Prinzip der Realitätsnähe und des eher induktiven Vorgehens
- Prinzipien der Verinnerlichung und des operativen Durcharbeitens (nach Aebli)
- Integrations-, Rückschalt-, Zwischenschaltprinzip
- Prinzip der Variation der Darstellungsebenen (nach Bruner)
- Prinzip der Veranschaulichungsmittel (nach Dienes)
- Prinzip der mathematischen Variation (nach Dienes)

- Prinzip der Abschirmung (nach Bruner) "

(Zech 1977, S. 118)

Das Prinzip der Stufengemäßheit stützt sich auf Piagets Stufentheorie selbst und folgert, daß der Einsatz mathematischer Lerninhalte und Lernziele am kognitiven Entwicklungsstand des Schülers gemessen werden muß.

Z.P.Dienes, der eine zeitlang mit Bruner im Cognitive Center der Universität Havard zusammengearbeitet hat, beschreibt in einer "Rahmentheorie des mathematischen Lernens, die auf psychologischen Denkexperimenten beruht" (Dienes 1965, S. 10) Lernprinzipien, die einsichtiges Mathematiklernen ermöglichen:

"1. Dynamisches Prinzip
Vorbereitungs-, Struktur- und Übungsspiele müssen als notwendige Erfahrungen geboten werden, aus denen schließlich die mathematischen Begriffe gebildet werden, sofern jeder Spieltyp zur geeigneten Zeit eingeführt wird. Bei kleinen Kindern müssen diese Spiele notgedrungen mit konkretem Material gespielt werden; Gedankenspiele können jedoch allmählich eingeführt werden, um einen Vorgeschmack von dem faszinierendsten aller Spiele zu geben, nämlich der mathematischen Forschung.

2. Aufbauprinzip
Bei der Gliederung der Spiele muß immer die Konstruktion der Analyse vorangehen, die im Lernen der Kinder unter 12 Jahren fast noch gänzlich fehlt.

3. Mathematisches Variabilitätsprinzip
Begriffe, die Variable einschließen, müssen durch Experimente gelernt werden, die die größtmögliche Zahl von Variablen umfassen.

4. Prinzip der Variation der Veranschaulichung
Um bei der Begriffsbildung einen möglichst weiten Rahmen für individuelle Variationen zu haben und das Erfassen des Kerns einer Abstraktion zu fördern, muß dieselbe Struktur in möglichst vielen äquivalenten Veranschaulichungen geboten werden." (S. 44)

Aebli, ein Schüler Piagets, hat die Umweltbedingungen der Erziehung, die Komplexität und Anschaulichkeit des Gegenstandes und die Motivation der Versuchsperson stärker als sein Lehrer

betont. Er faßt Denkentwicklung mehr als Lernprozeß auf. (Vgl. Aebli 1963, S. 72) Daher ist für ihn die Frage wichtig, wie Denkoperationen optimiert werden können. Er kommt zu dem Schluß, daß zum bleibenden Aufbau einer Operation eine "Verinnerlichung" und eine "operative Durcharbeitung" erfolgen muß: "Am Anfang steht der effektive Vollzug am konkreten Gegenstand. Auf der zweiten Stufe wird der Gegenstand bildlich dargestellt, und der Schüler stellt sich die Operation aufgrund dieser Gegebenheiten vor. Auf der dritten Stufe bedient sich der Schüler bei ihrem Vollzug ausschließlich der Zeichen, welche Gegenstand und Operation vertreten." (1961, S. 102) Bei Schwierigkeiten heißt das für den Lehrer, daß er zu der darunterliegenden Stufe zurückgehen muß, d.h. daß er das Rückschalt- bzw. Zwischenschaltprinzip anwendet.
Die Verinnerlichung der Operation wird auf allen Stufen durch ein operantes Durcharbeiten, "ein variables, sinnbezogenes Üben" (S.99) unterstützt und es soll zugleich versucht werden, viele Verbindungen zu bereits verinnerlichten Operationen aufzuzeigen, um so zu immer allgemeineren Gruppierungen im Piagetschen Sinne zu gelangen. (Integrationsprinzip)

Bruners Entwicklungstheorie des Denkens modifiziert die Piagetsche Theorie dahingehend,als er sich nicht so sehr auf zeitliche Stufen des Denkniveaus stützt, sondern die Wechselbeziehung der drei Darstellungsebenen (enaktive, ikonische und symbolische Ebene) betont. "Der intellektuell Erwachsene zeichnet sich durch die Fähigkeit aus, - den Erfordernissen entsprechend - flexibel zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen zu wechseln."(Bruner 1971, S. 21)

Das Prinzip der Abschirmung, das von Bruners Denktheorie abgeleitet wird, erläutert Hole (1973) so:
"Die Maßnahme, den Schüler vor Anschauung und Wissen abzuschirmen, mag zunächst erstaunen, da man doch im allgemeinen die Anschauung zur Erleichterung von Denkprozessen heranziehen und dafür sorgen wird, bereits vorhandenes Wissen in neu zu erarbeitende Zusammenhänge zu integrieren. Dennoch gibt es zahlreiche Unterrichtssituationen - sie haben durch die neue Mathematik sogar erheblich an Bedeutung zugenommen -, in denen

Anschauung oder das Wissen Denkprozesse nicht bloß erleichtern, sondern geradezu in den Hintergrund drängen kann. Als Lehrer unterliegt man leicht der Gefahr, zu meinen, der Denkprozeß habe stattgefunden, obwohl der Schüler in Wirklichkeit vielleicht nur eine aus der Anschauung oder dem Wissen entnommene Beobachtung oder Aussage wiedergegeben hat. Wie bei der handlungsmäßigen Darstellung die Notwendigkeit von Vor- und eventuellen Nachüberlegungen betont wurde, so sollte bei den erwähnten Unterrichtssituationen die Anschauung oder das Wissen abgeschirmt werden, und zwar mindestens so lange, bis der Denkprozeß stattgefunden hat." (S. 53f)

4.3. Das Teilcurriculum - Stochastik - für die 5. und 6. Jahrgangsstufe

In diesem Abschnitt folgen nun die beiden Teilcurricula, die Handreichungen für den Lehrer und die Schülerskripten.

Ich habe die Curricula entsprechend der heute üblichen Form bayerischer Curricula notiert, allerdings ohne die vierte Spalte 'Lernzielkontrolle', da darüber unter 5.2.1. und im 6. Abschnitt gesondert gesprochen wird.

Das Schülerskriptum wird vervielfältigt und soll jedem Schüler zur Bearbeitung übergeben werden.
Die Literaturangaben am Ende des Skriptum und die Indizes unter manchen Aufgaben wurden erst nach der Vervielfältigung für die Schüler eingetragen.

4.3.1. 5. Jahrgangsstufe

4.3.1.1. Das Teilcurriculum

Lernziele	Lerninhalte	Unterrichtsverfahren
1. Häufigkeiten		
1.1. Fähigkeit, aus einer Urliste die absoluten Häufigkeiten von bestimmten Merkmalsausprägungen in einer Strichliste und in einem Blockdiagramm darzustellen		Mit Hilfe von Daten aus der Klasse (Geburtsdaten, Gewicht, Schuhgröße ..) können die Schüler selbst ein Urliste zusammenstellen und sie in Gruppenarbeit auswerten
1.2. Vertrautheit mit dem Begriff der absoluten Häufigkeit		
1.3. Beherrschung der Summenkontrolle		
1.4. Fähigkeit, bei kontinuierlichen Merkmalen (z.B. Körpergröße) Klassen zu bilden		
1.5. Fähigkeit, Fachausdrücke richtig zu gebrauchen	Urliste absolute Häufigkeit Merkmal Merkmalsausprägung Strichliste Blockdiagramm	
2. Zufall und Wahrscheinlichkeit		
2.1. Fähigkeit, zwischen zufälligen und vorhersagbaren Ereignissen zu unterscheiden		Die Schüler sollen hier verschiedene Zufallsgeneratoren kennenlernen (Urnen, Glücksräder, Münzen, Reißnägel etc)

2.2. Fähigkeit, einfache Zufallsexperimente durchzuführen		
2.3. Fähigkeit, Beispiele f. Zufallsexperimente anzugeben		
2.4. Fähigkeit, Ereignisse nach dem Grad ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen		
2.5. Fähigkeit, zu ein- und mehrstufigen Zufallsexperimenten die Ergebnismenge anzugeben und in aufzählender Form zu notieren	Beispiel: Einmaliges Würfeln: $G = \{1,2,3,4,5,6\}$	
2.6. Fertigkeit, Baumdiagramme zu den Zufallsexperimenten zu zeichnen	Zweige Knoten Pfad Baumdiagramm	Die Baumdiagramme sollen anfangs nur von unten nach oben gezeichnet werden.
2.7. Kenntnis, daß beim zweistufigen Experiment geordnete Paare, beim dreistufen Experiment geordnete Tripel Elemente der Ergebnismenge sind		Die Ordnung der Paare bzw. Tripel kann man immer wieder betonen, indem man auf die Wurffolge aufmerksam macht und im Baumdiagramm die Pfade nachziehen läßt
2.8. Fähigkeit, Ereignisse von zwei- und dreistufigen Zufallsexperimenten nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen	Beispiel: Was ist wahrscheinlicher: A: 2-mal Zahl B: 3-mal Zahl? (3-maliger Münzwurf)	Die Schüler können die Ereignisse als Mengen schreiben: $A = \{(w,z,z,)$ $(z,w,z)(z,z,w)\}$ $B = \{(z,z,z)\}$ und dann von der Mächtigkeit ausgehend ordnen

2.9. Fähigkeit, Fachausdrücke richtig zu gebrauchen	Zufallsexperiment Ergebnismenge Ergebnis geordnetes Paar, Tripel	Die Beschäftigung mit qualitativen bzw. komparativen Wahrscheinlichkeiten soll mit verschiedenen Zufallsexperimenten erfolgen Gruppenarbeit ist zu empfehlen Auf die Stabilisierung der Häufigkeit bei vielen Versuchen kann durchaus schon eingegangen werden
3. Abzählen		
3.1. Fähigkeit, alle möglichen Kombinationen (Kleider, Speisenfolgen..) zu finden	Systematisches Abzählen mittels Produktbildung	Zählstrategien sollen grundsätzlich mit Hilfe von Baumdiagrammen entwickelt werdem. Allgemeine kombinatorische Formeln sollen nicht erarbeitet werden
3.2. Fähigkeit, zu vorgegebenen Baumdiagrammen Geschichten zu erfinden		Soweit möglich, sollen die Schüler zuerst mit konkretem Material umgehen und die Situation spielen
3.3. Fähigkeit, Baumdiagramme zu zeichnen		
3.4. Fähigkeit, alle Legotürme aus vier Steinen in zwei Farben (mit Wiederholung) zu bauen, (zu zeichnen)	Anzahl der k-Tupel aus einer Menge bilden	Der Abstraktionsprozeß muß behutsam entwickelt werden. Die Schüler sollen zuerst unsystematisch Türme bauen und auch zuerst weniger hoch.

3.5. Fähigkeit, das Baumdiagramm zu zeichnen		Sie sollten möglichst allein auf eine systematische Ordnung kommen Das Baumdiagramm sollte fertig sein
3.6. Fähigkeit, alle Legotürme in verschiedenen Höhen und mehreren Farben (ohne Wiederholung) zu bauen bzw. zu zeichnen	Anzahl der Permutationen aus einer Menge bilden	
3.7. Fähigkeit, die entsprechenden Baumdiagramme zu zeichnen		

4.3.1.2. Handreichungen für den Lehrer

Im folgenden werden die Lernziele des Curriculum für den Unterricht mit dem Skriptum konkretisiert und zu den einzelnen Abschnitten des Lehrgangs didaktische und methodische Hinweise gegeben.
Die Schüler sollen das Skriptum als Arbeitsheft benutzen und nur gelegentlich zusätzlich im Mathematikheft Eintragungen machen.

1. Häufigkeiten

Die Urliste auf Seite 12 dient als Einstieg in diesen Themenkreis. Im Unterricht sollte eine Urliste mit Daten der Klasse selbst erstellt werden. Am besten auf Folie am Projektor, um sie längere Zeit parat zu haben. Damit können nun - auch unter Einsatz von Partner- bzw. Gruppenarbeit-die folgenden Lernziele erarbeitet werden: (siehe Curriculum)

1.1. Fähigkeit, aus einer Urliste die absoluten Häufigkeiten der Ausprägungen der Merkmale Geburtsmonat, Gewicht, Geschlecht, Körpergröße etc. in einer Strichliste und in einem Blockdiagramm darzustellen. (Aufgabe 1-5)

1.3. Beherrschung der Summenkontrolle (Aufgabe 1c u.a.)

1.4. Fähigkeit, mehrere Meßergebnisse zu einer Klasse zusammenzufassen. (Aufgabe 3)

1.5. Fähigkeit, Fachausdrücke richtig zu gebrauchen.

Schon zu Beginn dieses Abschnitts sollte jeder Schüler zum Sammeln von etwa 20 Pfennigstücken angehalten werden, damit für die Aufgabe 4 genügend Münzen zur Verfügung stehen.
Die Aufgaben 4 und 5 sind zur Vertiefung der Lernziele dieses Themenkreises gedacht. Durch die neue Problemstellung der Aufgabe 4 sollen die Schüler motiviert werden, in ihrer Umwelt nach Situationen zu suchen, in denen das Anlegen von Strichlisten sinnvoll sein könnte.

Am Ende dieses Abschnitts sollen alle Schüler mit den Fachausdrücken Urliste, absolute Häufigkeit, Merkmal, Merkmalsausprägung, Strichliste und Blockdiagramm vertraut sein.

2. Zufall und Wahrscheinlichkeit

2.1. Einstufige Zufallsexperimente

Als Einstieg sind hier zwei verschiedene Spiele gewählt worden, wobei das zweite ein reines Zufallsexperiment ist, während beim ersten zwar gewürfelt wird, aber durch eine geschickte Strategie die Gewinnchancen steigen. Beide Spiele sollen unbedingt gespielt werden. Das erste zu zweit, das zweite vielleicht im Klassenverband, wobei nach jedem Ziehen die Kärtchen wieder zurückgelegt werden. Vorerst sollten bei der 2. Aufgabe nur Vermutungen über die Chancen angestellt werden. Eine Chancen-Ordnung der 6 Aussagen kann u.U. erst am Ende dieser Einheit, also nach der 7. Aufgabe, in Angriff genommen werden.

Nach diesen beiden Spielen kann dann das erste Lernziel dieses Abschnitts erarbeitet werden:

2.1. Fähigkeit, zwischen zufälligen und vorhersagbaren Ereignissen zu unterscheiden. (Aufgabe 3)

Die Aufgaben 4 bis 7 dieses Themenkreises stellen Übungsmöglichkeiten dar. Um die Stereotypisierung auf einen einzigen Zufallsgenerator zu vermeiden, ist für jede der vier Aufgaben ein anderer gewählt worden. (Urne, Glücksrad, Würfel, Münze)

Bei Aufgabe 7b kann - je nach Klasse - u.U. bereits das Prinzip der großen Zahlen angeschnitten werden.
Die weiteren Lernziele dieses Abschnitts sind:

2.2. Fähigkeit, einfache Zufallsexperimente durchzuführen (Aufgabe 2, 4c, 7)

2.3. Fähigkeit, Beispiele für Zufallsexperimente anzugeben.

2.4. Fähigkeit, Ereignisse nach dem Grad ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen. (Aufgabe 2,4,5,6)

Lösungen der Aufgaben:

1b) 6-mal

2) F-E-C-D-A-B

3) A - unmöglich
B - unwahrscheinlich, aber möglich
C - das kann sein, aber wir wissen es nicht genau
D - sehr wahrscheinlich

E - das wissen wir genau, das ist sicher.

4) a/2; b/2; c/2; d/2; e/2

5) $3 - 8 - \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{matrix} - 6 - 4 - 5$

6) a) schraffiert

b) $6 - 3 - \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} - 7 - 4 - \begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix}$

2.2. Mehrstufige Zufallsexperimente

Der Einstieg in diesen Abschnitt erfolgt mit dem Modell des Münzwurfs. Über eine Phase des eigenen Experimentierens soll allmählich zum Gedankenexperiment hingeführt werden und vorsichtig eine erste Formalisierung vorgenommen werden.
Am Ende dieses Abschnitts sollen die Schüler zu allen Zufallsexperimenten die Ergebnismengen notieren und Ereignisse der verschiedenen Zufallsexperimente nach der Chance ihres Auftretens ordnen können. Hierzu empfiehlt es sich von Anfang an Ereignisse als Mengen zu schreiben und auf die Anzahl der Elemente zu verweisen.
Ein ganz wichtiges Hilfsmittel stellt hier das Baumdiagramm dar. Die Bezeichnungen Zweig, Knoten und Pfad des Baumdiagramms sollten vom Lehrer korrekt benutzt werden; die Schüler werden dann allmählich nachziehen.
Auf die Ordnung der Paare bzw. Tripel kann man immer wieder hinweisen, indem man auf die Wurffolge aufmerksam macht und die Pfade im Baumdiagramm nachziehen läßt.

Die Aufgabe 2 bildet eine Zusammenfassung der Münzexperimente. Manche Schüler werden sicher von allein bemerken, daß dieses Spieldiagramm Ähnlichkeit mit dem Baumdiagramm des Münzwurfs hat und daß man mit diesem Spiel den 6-fachen Münzwurf simulieren kann.
Die Aufgaben 3 und 4 sind zur Vertiefung gedacht. Sie können,

je nach Vermögen und Motivationslage der Klasse, als reales Experiment oder als Gedankenexperiment durchgearbeitet werden. Beide Aufgaben eignen sich zur Partner- bzw. Gruppenarbeit.

Folgende Lernziele sollen in diesem Abschnitt erarbeitet werden:

2.5. Fähigkeit, zu ein- und mehrstufigen Zufallsexperimenten die Ergebnismenge anzugeben und in aufzählender Form zu notieren.

2.6. Fertigkeit, Baumdiagramme zu den Zufallsexperimenten zu zeichnen.

2.7. Kenntnis, daß beim zweistufigen Experiment geordnete Paare, beim dreistufigen Experiment geordnete Tripel Elemente der Ergebnismenge sind.

2.8. Fähigkeit, Ereignisse von zwei- und dreistufigen Zufallsexperimenten nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen.

2.9. Fähigkeit, Fachausdrücke richtig zu gebrauchen.

Lösungen der Aufgaben:

1d) A: $\{(w,w,w)\}$
B: $\{(w,w,z), (w,z,w), (z,w,w)\}$
C: $\{(w,z,z), (z,w,z), (z,z,w)\}$
D: $\{(z,z,z)\}$

"2-mal Zahl" ist wahrscheinlicher

2b) 6-mal

2c) d

3a) $G = \{(1,1), (1,2) \ldots\ldots\ldots (5,5)\}$
$|G| = 25$

3b) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (5,1), (5,2), (5,5)\}$

3c) 4 12 10 9 10 9

3d) b-c-d-a

4b) $G = \{(1,1), \ldots\ldots\ldots, (6,6)\}$ $|G| = 36$

4c) $A = \{2,3,\ldots\ldots\ldots,12\}$

4d) a-b-c

3. Abzählen

Dieser Abschnitt kann mit Verkleidungsspielen begonnen werden. Es wäre gut, wenn wenigstens an einer Puppe demonstriert würde, wieviele Kombinationen möglich sind.
Der Weg vom Baumdiagramm zur passenden Geschichte soll den Schülern den Abzählvorgang bewußter machen.

Aufgabe 2 geht einen kleinen Schritt im Abstraktionsprozeß weiter. Hier soll unbedingt anfangs noch mit Legosteinen gebaut werden, um dann allmählich zum Zeichnen überzugehen.
Bei Aufgabe 2b und 2c müssen die Schüler dann auch das Baumdiagramm zeichnen.
Die Aufgabe 3, Bilden der Permutationen, dh. eine Farbe darf nicht mehrmals in einemTurm vorkommen, kann vielleicht schon vorbereitet werden, indem man bei Aufgabe 2c zusätzlich fragt, wieviele Türme weggelegt werden müssen, wenn keine Farbe doppelt vorkommen darf.
Bei allen Abzählaufgaben empfiehlt es sich, die Baumdiagramme farbig nachzuziehen.
Der Abstraktionsprozeß muß behutsam vom Bauen mit Klötzchen (enaktive Ebene) über das Zeichnen der Türme und Zeichnen des Baumdiagramms (ikonische Ebene) zum eventuellen Aufschreiben der Tripel bzw. 4-Tupel (symbolische Ebene) entwickelt werden.
In diesem Abschnitt kann durchaus auf der ikonischen Ebene aufgehört werden. Falls aber die Schüler auch noch weitergeführt werden können, dann sind die Aufgaben 3b, c, d, e, dazu geeignet.

Die Lernziele 3.1. bis 3.7. (siehe Curriculum) sollen in diesem Abschnitt erarbeitet werden.

Schülerbuch zum Lehrgang "Stochastik"

für die 5. Jahrgangsstufe

1. Häufigkeiten

2. Zufall und Wahrscheinlichkeit

   2.1. Einstufige Zufallsexperimente
   2.2. Mehrstufige Zufallsexperimente

3. Abzählen

1. Häufigkeiten

In einem Münchner Sportverein haben sich 30 Schülerinnen und Schüler fur die Jazz-Gymnastik im Jahre 1978 eingetragen. Folgende Liste ergab sich:

Nr.	Name	Vorname	Geburtsdatum	Größe	Gewicht	Schule
1	A.	Brigitte	8. 4.1964	1.60	42	Wörthstraße
2	A.	Anne-Dore	3.10.1963	1.69	45	Wörthstraße
3	B.	Rosi	5. 9.1963	1.65	43	Wörthstraße
4	B.	Elke	15. 5.1964	1.60	40	Luisenstraße
5	B.	Ulrike	13. 1.1965	1.62	43	Luisenstraße
6	D.	Barbara	21. 1.1965	1.59	41	Luisenstraße
7	D.	Heike	24. 1.1965	1.50	39	Luisenstraße
8	D.	Peter	27.10.1963	1.71	45	Wörthstraße
9	E.	Thomas	28. 3.1964	1.68	46	Wörthstraße
10	F.	Tom	3. 1.1964	1.65	47	Wörthstraße
11	F.	Holger	4. 8.1964	1.66	42	Metzstraße
12	G.	Martin	23. 1.1964	1.64	42	Metzstraße
13	G.	Andrea	24. 1.1965	1.60	39	Metzstraße
14	H.	Birgit	9. 8.1964	1.60	40	Luisenstraße
15	K.	Maria	28.12.1963	1.62	40	Annastraße
16	K.	Karin	15. 9.1963	1.63	42	Wörthstraße
17	K.	Peter	18.10.1963	1.72	42	Hildegardstraße
18	L.	Solveig	8. 5.1964	1.50	38	Hildegardstraße
19	L.	Katrin	3. 6.1964	1.50	40	Luisenstraße
20	L.	Rainer	4. 4.1964	1.65	45	Annastraße
21	M.	Jens	1. 4.1964	1.64	45	Wörthstraße
22	N.	Harald	23. 3.1964	1.62	46	Luisenstraße
23	O.	Karin	23. 9.1963	1.60	47	Annastraße
24	P.	Sylvia	1. 1.1965	1.59	49	Luisenstraße
25	R.	Renate	25. 2.1965	1.55	41	Luisenstraße
26	S.	Andreas	1. 8.1963	1.63	42	Annastraße
27	S.	Thomas	23.10.1963	1.66	43	Luisenstraße
28	S.	Andreas	28. 3.1964	1.60	47	Hildegardstraße
29	T.	Maria	29. 5.1964	1.50	41	Wörthstraße
30	W.	Inge	1. 6.1964	1.49	42	Hildegardstraße

Diese Liste dient uns als U r l i s t e für statistische Untersuchungen.

1. Beispiel:

Die Schülerinnen und Schüler kommen aus verschiedenen Schulen zur Gymnastik.
Schüler einer der fünf Schulen zu sein, ist ein M e r k m a l; es kommt in verschiedenen Ausprägungen vor:

Schüler der Schule an der Wörthstraße
Schüler der Schule an der Luisenstraße
Schüler der Schule an der Metzstraße
Schüler der Schule an der Annastraße
Schüler der Schule an der Hildegardstraße.

Wie verteilen sich die Schüler auf die fünf Schulen?

Mit Hilfe einer S t r i c h l i s t e können wir die H ä u f i g k e i t e n der fünf Merkmalsausprägungen schnell feststellen:

Merkmalsausprägung	Häufigkeit	
Annastraße	////	4
Hildegardstraße	////	4
Luisenstraße	~~////~~ ~~////~~	10
Metzstraße	///	3
Wörthstraße	~~////~~ ////	9
		30

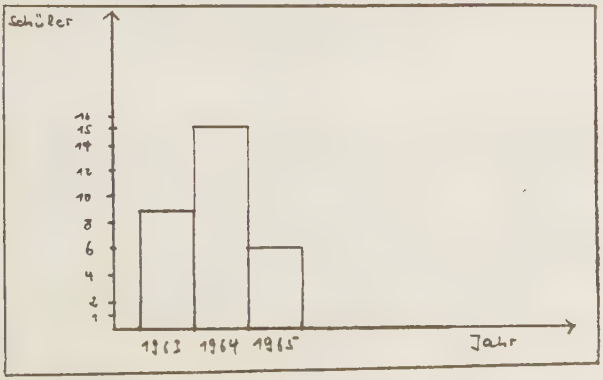
Darstellung der Häufigkeiten im B l o c k d i a g r a m m :

2. Beispiel:

Ebenfalls ein Merkmal der Urliste ist das Geburtsjahr.
Die Merkmalsausprägungen sind 1963, 1964 und 1965.
Strichliste und Blockdiagramm sehen wie folgt aus:

Merkmalsausprägung	Häufigkeit	
1963	~~////~~ ////	9
1964	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	15
1965	~~////~~ /	6
		30

Summenkontrolle!



Aufgaben:

1. Erstelle jeweils eine Strichliste und ein Blockdiagramm:
   Verwende die Angaben der Liste von Seite 1.
   a) Merkmal Geburtsmonat
      Merkmalsausprägung: Januar, Februar, März usw.
   b) Merkmal Gewicht
      Merkmalsausprägung: 38 kg, 39 kg usw.
   c) Woran erkennt man, ob kein Strich zuviel gezählt bzw. geschrieben wurde?

2. Stelle fest, wieviele Jungen und wieviele Mädchen sich in die Liste eingetragen haben.
   Gehe vor wie in Aufgabe 1.

3. Bei dem Merkmal "Größe" fassen wir mehrere Meßergebnisse zu einer Klasse zusammen:
   150 cm, 151 cm, ..., 154 cm zu "150 cm bis 154 cm"
   155 cm, 156 cm, ..., 159 cm zu "155 cm bis 159 cm" usw.
   a) Erstelle eine Strichliste,
   b) Zeichne das Blockdiagramm,
   c) Bilde zum Merkmal 'Gewicht' eine geeignete Klasseneinteilung und erstelle Strichliste und Blockdiagramm.

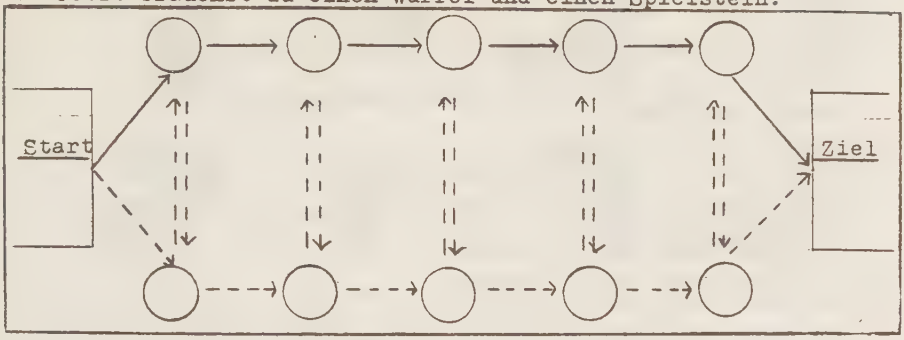
4. Auf jeder Münze der Bundesrepublik Deutschland kann man ablesen, in welcher Prägeanstalt sie hergestellt wurde.
   D: München
   F: Stuttgart
   G: Karlsruhe
   J: Hamburg
   a) Prüfe gemeinsam mit deinen Mitschülern möglichst viele Münzen, lege eine Strichliste an und zeichne ein Blockdiagramm.
   b) Nimmt die Häufigkeit mit der Entfernung von München ab?
   c) Findest du auf den Münzen noch ein weiteres Merkmal, das man untersuchen könnte? Wie gehst du vor?

5. Suche selbst in deiner Umwelt Situationen, in denen das Anlagen von Strichlisten sinnvoll ist.
   Führe ein Beispiel durch und erstelle auch das zugehörige Blockdiagramm.

2. Zufall und Wahrscheinlichkeit

2.1. Einstufige Zufallsexperimente

1. Jetzt brauchst du einen Würfel und einen Spielstein.



1)

a) Folgende Regeln gelten bei diesem Würfelspiel:
- Augenzahl "1", "2" : Du darfst auf dem gestrichelten Weg gehen.
- Augenzahl "3", "4", "5", "6" : Du darst auf dem schwarzen Weg gehen.
- Du darfst auch auf einem Feld warten.

Sieh aber zu, daß du möglichst rasch am Ziel ankommst.

b) Wie oft muß man mindestens würfeln, um das Ziel zu erreichen?

c) Peter erreichte mit 7 Würfen das Ziel.
Was könnte er hintereinander gewürfelt haben?
Gib drei Beispiele an.

d) Max behauptet, der gestrichelte Weg sei der schnellere;
Thomas ist anderer Meinung. Wie entscheidest du dich?

2. In einer Urne liegen 1000 Kärtchen. Auf den Kärtchen stehen die Zahlen von 1 bis 1000. Keine Zahl wurde ausgelassen.
Es wird ein Kärtchen blind gezogen.
Was ist wahrscheinlicher?

A: Die Zahl ist durch 100 teilbar.
B: Die Zahl ist durch 250 teilbar.
C: Die Zahl ist größer als 300 und kleiner als 320.
D: Die Zahl ist durch 90 teilbar.
E: Die Zahl ist kleiner als 30.
F: Die Zahl ist ungerade.

2)

3. Ordne einander zu:

unmöglich - unwahrscheinlich, aber möglich - das kann sein, aber wir wissen es nicht sicher - sehr wahrscheinlich - das wissen wir genau, das ist sicher -

- Der Weltmeister im Hochsprung sprang 100 m hoch
- Am 1.8.1980 schneit es in München

- Peter wird mindestens 50 Jahre alt.
- Peters Mutter gewinnt im Lotto nicht den Hauptgewinn.
- Peter hat einen Stein in der Hand. Läßt er ihn los, dann fällt der Stein herunter.

4. Was ist deiner Ansicht nach wahrscheinlicher?

a) Peter bekommt in der nächsten Mathematikschulaufgabe eine 1
Peter bekommt in der nächsten Mathematikschulaufgabe eine 1 oder eine 2.

b) Die Mutter ist im Haus.
Die Mutter ist im Garten oder im Haus.

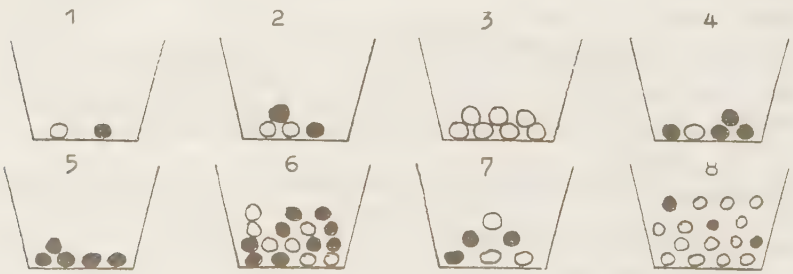
c) Ein Plättchen ist rot, klein und dreieckig.
Ein Plättchen ist rot.
Ein Plättchen ist rot und klein.

d) In einem Wald stehen Buchen.
In einem Wald stehen Laubbäume.

e) An einem Freitag kommen alle Schüler zu spät zum Unterricht.
Es kommt mindestens ein Kind zu spät.
Es kommt höchstens ein Kind zu spät.

5. Du darfst eine Urne auswählen.
Aus der Urne deiner Wahl ziehst du dann blind eine Kugel.
Bei "weiß" gewinnst du.

a) Welche Urne wirst du auswählen?
b) Begründe deine Wahl.
c) Ordne die Urnen nach der Gewinnchance.

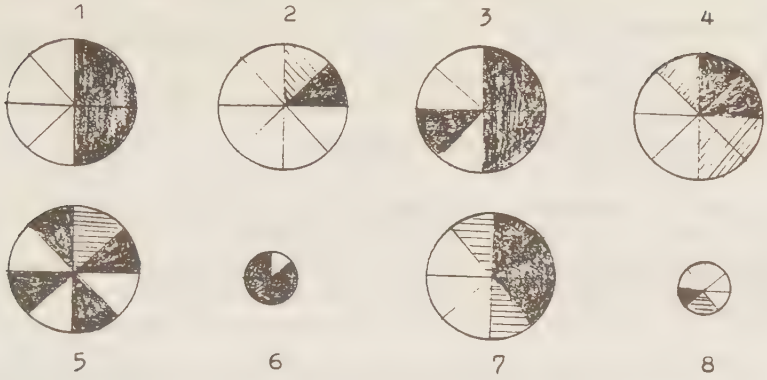


6. a) Du kennst wahrscheinlich bereits Glücksräder.
Hier ist eines gezeichnet.
Beim Spielen wird der Zeiger gedreht, losgelassen und er bleibt schließlich in einer zufälligen Stellung stehen.

Ist es wahrscheinlicher, daß er über dem schwarzen, dem weißen oder dem schraffierten Feld stehen bleibt?

Begründe deine Aussage.

b) Bei "schwarz" gewinnt man.
Ordne die Räder nach ihren Gewinnchancen:



7.
a) Würfle 100-mal und erstelle eine Strichliste:

Augenzahl	Häufigkeit	
1		
2		
3		
4		
5		
6		
		100

b) Erstellt an der Wandtafel eine Liste mit den Häufigkeiten aller Schüler.
Zeichnet ein Blockdiagramm.
Diskutiert über die Gewinnchancen der sechs Augenzahlen.

2.2. Mehrstufige Zufallsexperimente

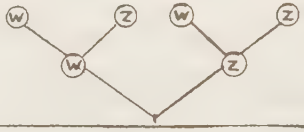
1. Der Münzenwurf

a) Wirf eine Münze 100-mal.
Das B a u m d i a g r a m m
zeigt die beiden möglichen Ergebnisse. w steht für "Wappen", z steht für "Zahl".

In der folgenden Tabelle sollst du die Verteilung der Häufigkeit bei deinen Würfen eintragen:

Ergebnis	Häufigkeit	
w		
z		
		100

b) Wirf eine Münze zweimal hintereinander und schreibe die Ergebnispaare auf.
Führe das Zufallsexperiment 100-mal durch. Das Baumdiagramm zeigt die möglichen Ergebnisse.

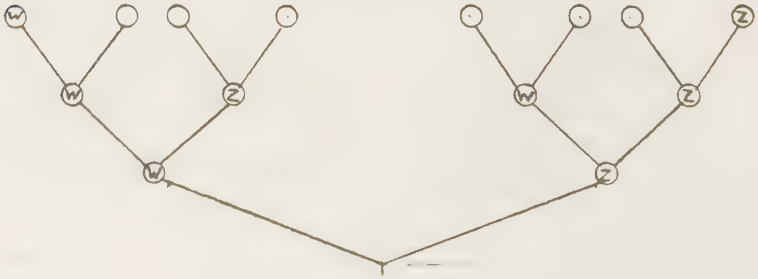


Ergebnis	Häufigkeit		
(w,w)			
(,)			
(,)			
(,)			
		100	

In der letzten Spalte sollen am Ende die Häufigkeiten stehen, die insgesamt in der Klasse erreicht wurden.

Was ist wahrscheinlicher?
"Einmal Zahl" oder "Zweimal Zahl"

c) Wirf eine Münze dreimal hintereinander. Führe das Zufallsexperiment 100-mal durch.
Welche T r i p e l (z.B. (w,w,w)) können vorkommen?
Das Baumdiagramm hilft dir beim Finden aller möglichen Ergebnisse:



Vervollständige die Tabelle und notiere die Häufigkeiten:

Ergebnis	Häufigkeit		
(w,w,w)			
(, ,)			
		100	

d) Suche aus der Aufgabe c) alle möglichen Ergebnisse, die folgende Aussagen erfüllen. Schreibe die Ergebnisse in Mengenklammern:

A: 0-mal Zahl : {(w,w,w)}

B: 1-mal Zahl : {(w,w,z),(w,z,w), }

C: 2-mal Zahl :

D: 3-mal Zahl :

Was ist wahrscheinlicher?
"3-mal Zahl" oder "2-mal Zahl"

e) Wirf eine Münze 4-mal hintereinander und verfahre wie in den vorhergehenden Aufgaben.

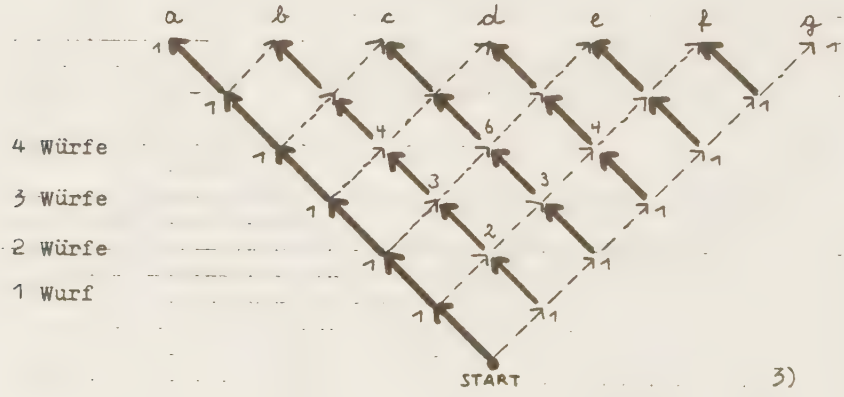
Beim Würfeln, beim Drehen eines Glücksrades, beim Münzwurf usw. kannst du das Ergebnis nicht vorhersagen.
Man nennt solch ein Experiment daher ein Z u f a l l s - e x p e r i m e n t.
Die Menge aller möglichen E r g e b n i s s e eines Zufallsexperimentes heißt E r g e b n i s m e n g e .

Vervollständige jetzt die folgende Tabelle:

Zufallsexperiment	Ergebnismenge
Einmaliges Werfen einer Münze	{ }
Zweimaliges Werfen einer Münze	{ }
Dreimaliges Werfen einer Münze	{ }
Einmaliges Werfen eines Würfels	{ }

2. Das Straßenspiel

Du brauchst jetzt einen Spielstein und eine Münze.



3)

Setze auf den Start einen Spielstein.
Wirfst du "Wappen", dann darfst du einen gestrichelten Weg bis zum Pfeilende gehen. Wirfst du "Zahl", dann darfst du einen schwarzen Weg bis zum Pfeilende gehen.

a) Spiele einige Spiele und beobachte gut.

b) Wie oft mußt du werfen, um bei einem der Buchstaben a bis g anzukommen?

c) Bei welchen Buchstaben kommt man mit dem Spielstein am wahrscheinlichsten an?

d) Bei diesem Spiel wird wie in Aufgabe 1 mit einer Münze geworfen. Du kennst inzwischen die möglichen Ergebnisse für einen Wurf, zwei, drei und vier Würfe.
Die Zahlen im Straßenspiel sagen über die Anzahl der Ergebnisse aus. Vergleiche mit Aufgabe 1 und suche die fehlenden Zahlen für 5 und 6 Würfe.
Was fällt auf?

3. Ein Urnenmodell

Aus der Urne rechts wird zweimal hintereinander eine Kugel gezogen:

Ziehen, Farbe und Ziffer notieren, zurücklegen, mischen und noch einmal ziehen, notieren und zurücklegen.

a) Welche Kugelpaare können sich bei dieser Doppelziehung ergeben?
Das Baumdiagramm soll helfen:

b) Peter zieht "beide weiß". Welche Kugelpaare können es gewesen sein?

c) Schreibe die Anzahl der betreffenden Kugelpaare in die folgende Aufstellung:

beide schwarz	eine schwarz eine weiß	die erste schwarz	keine schwarz	die 2.schwarz	beide weiß

d) Was tritt mit mehr Wahrscheinlichkeit ein?
Stelle deine Überlegungen mit Hilfe des Baumdiagramms an.
Ordne dann die Buchstaben a,b,c,d nach steigender Wahrscheinlichkeit:

a: Die Zahl 5 wird nicht gezogen,

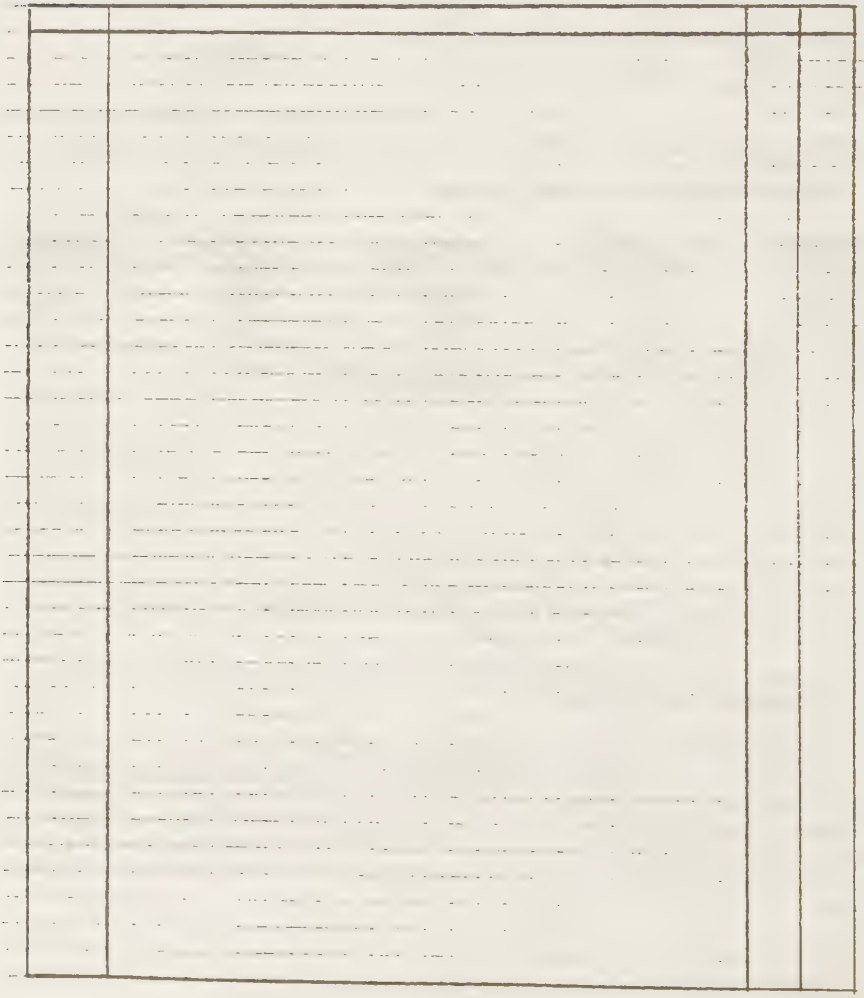
b: Beide Kugeln sind schwarz,

c: Keine Kugel ist schwarz,

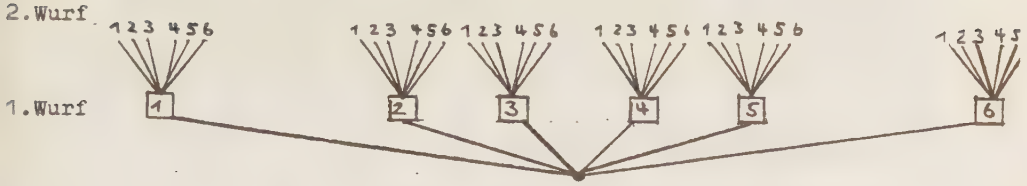
d: Die erste Kugel ist schwarz, die zweite Kugel ist schwarz oder weiß.

4. Zweimaliges Werfen eines Würfels

a) Führe das Zufallsexperiment "Zweimaliges Werfen eines Würfels" 100-mal durch. Schreibe alle möglichen Zahlenpaare in die Tabelle und notiere deine Häufigkeiten. Schließlich schreibe in die letzte Spalte auch die Häufigkeiten, die insgesamt in der Klasse erreicht wurden:



b) Schreibe die Ergebnismenge auf. Das Baumdiagramm soll dir dabei helfen:



c) Welche Augensummen sind möglich?

d) Was ist wahrscheinlicher?

a: Die Augensumme ist 6 bis 8,

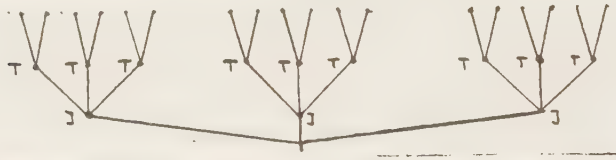
b: Die Augensumme ist kleiner als 4,

c: Die Augensumme ist 12.

3. Abzählen

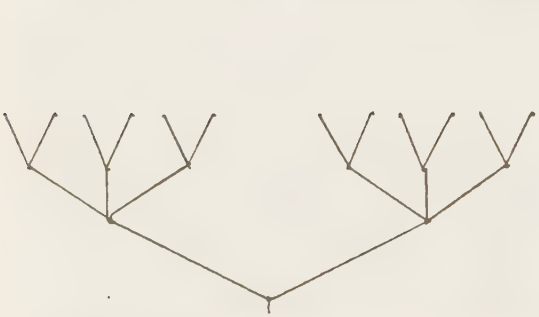
1.

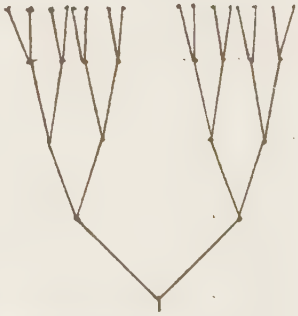
a) Ein Mädchen wurde von seiner Patentante großzügig beschenkt. Es erhielt drei Jeans und zu jeder Jeans drei T-Shirts. Schließlich stellt die Tante noch zu jedem T-Shirt den Kauf von zwei Halstüchlein in Aussicht. Da fällt das Mädchen seiner Tante um den Hals und ruft begeistert: "Das sind ja --- Tüchlein!
Weißt du auch, wieviele es sind?
Das Baumdiagramm soll dir helfen:



4)

b) Erfinde zu den folgenden Baumdiagrammen passende Geschichten:





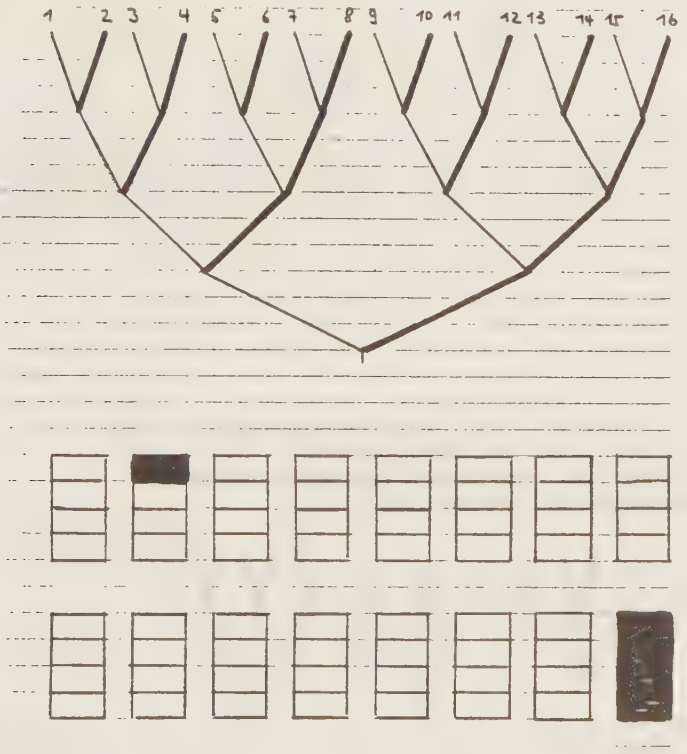
c) Peter möchte sich am Rosenmontag als Clown verkleiden. Er kann aus folgenden Kleidungsstücken wählen:

A: zwei Kappen $\{K_1, K_2\}$
B: vier Jacken $\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$
C: drei Hosen $\{H_1, H_2, H_3\}$

Auf wieviele verschiedene Arten kann sich Peter verkleiden?
Zeichne ein Baumdiagramm.

2. Wer baut die meisten Türme?

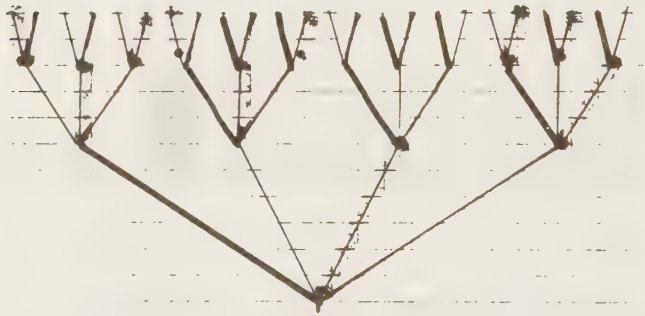
a) Du brauchst zu diesem Spiel Legosteine in zwei Farben. Zu folgendem Baumdiagramm sollen alle möglichen Türme aus vier Legosteinen in zwei Farben gebaut und den Pfaden des Baumes zugeordnet werden.



b) Suche selbst alle möglichen Türme aus drei Legosteinen in zwei Farben und zeichne das Baumdiagramm.

c) Gegeben sei die Menge mit den Farben Schwarz, Rot, Gelb.
Wie viele verschiedene Türme der Höhe - 2 - sind mit diesen Farben möglich?
Zeichne auch ein Baumdiagramm.

3.
a) Baue aus Legosteinen in den vier Farben Schwarz, Rot, Gelb, Blau alle Türme aus drei Steinen.
In keinem Turm darf eine Farbe mehrmals vorkommen.
Das Baumdiagramm soll dir helfen:



b) Auf wieviele Arten können sich zwei Personen auf zwei Stühle setzen?
Probiert mit zwei Schülern und zwei Stühlen.
Vervollständige das Baumdiagramm:

c) Auf wieviele Arten können sich drei Personen auf drei Stühle setzen?
Probiert mit drei Schülern und drei Stühlen.
Zeichnet schließlich ein Baumdiagramm.

d) Wie sich eine Person auf einen Stuhl setzen kann, ist dir natürlich klar.
Wieviele Möglichkeiten gibt es wohl bei vier Personen und vier Stühlen?

e) Drei Mädchen, Anette (A), Brigitte (B) und Ute (U) starten zu einem 60-Meter-Lauf.
Wieviele mögliche Ausgänge gibt es für diesen Lauf, wenn alle nacheinander das Ziel erreichen?

Literaturangaben zum Schülerskriptum

1) Vgl. Winter/Ziegler, Neue Mathematik 1972
3. Klasse, S. 127

2) Vgl. Winter/Ziegler, Neue Mathematik 1971
2. Klasse, S. 110

3) Vgl. Winter/Ziegler, Neue Mathematik 1972
3. Klasse, S. 128

4) Vgl. Neunzig/Sorger, Wir lernen Mathematik 1976
4. Klasse, S. 94

4.3.2. 6 Jahrgangsstufe

4.3.2.1. Teilcurriculum

Lernziele	Lerninhalte	Unterrichtsverfahren
1. Absolute und relative Häufigkeit		
1.1. Fähigkeit, aus einer Urliste die relativen Häufigkeiten von bestimmten Merkmalsausprägungen auszurechnen	Urliste Merkmal Merkmalsausprägung absolute Häufigkeit H relative Häufigkeit h in Bruch- und Dezimalbruchschreibweise	Die Urliste kann sinnvollerweise aus einem Fragebogen entstehen, den die Klasse u.U. selbst entwirft und dann auswertet Hier kann das Umrechnen eines gemeinen Bruchs in einen Dezimalbruch geübt werden Ggf. auch Angabe der Anteile in Prozenten
1.2. Fertigkeit, die relative Häufigkeit in einem Blockdiagramm darzustellen	Blockdiagramm Hochwertachse Rechtswertachse (Ordinat/Abszisse Y-Achse/X-Achse)	
1.3. Sicherheit im Ausführen von Zufallsexperimenten		Die Schüler sollen nicht nur Experimente mit gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen kennenlernen (Reißzwecken mit und ohne Plastikkopf, Legosteine verschiedener Größe, gezinkte Würfel)
1.4. Kenntnis, daß man bei Zufallsexperimenten nicht das einzelne Ergebnis voraussagen kann		

1.5. Kenntnis, daß sich die relative Häufigkeit mit wachsendem Stichprobenumfang stabilisiert		Addiert man die Häufigkeiten der Schüler, dann kann man in einer Klasse von 25 Schülern schon sehr gut den Stabilisierungseffekt aufzeigen

2. Zufall und Wahrscheinlichkeit

2.1. Zufallsexperimente und ihre Ergebnismengen

2.1.1. Fertigkeit, die Ergebnismenge eines Zufallsexperimentes in aufzählender Form zu notieren	Ergebnismenge G Ergebnis g	
2.1.2. Fähigkeit, Baumdiagramme zu den Zufallsexperimenten zu zeichnen	Zweig Knoten Pfad	
2.1.3. Kenntnis, daß bei zweistufigen Experimenten die Ergebnisse geordnete Paare, bei dreistufigen geordnete Tripel sind	geordnetes Paar Tripel	Hier muß immer wieder auf die Wurffolge aufmerksam gemacht werden; ebenso auf die Plazierung im Baumdiagramm
2.1.4. Fähigkeit, bekannte Zufallsexperimente auf das Urnenmodell zu übertragen		

2.2. Ereignisse und ihre relativen Häufigkeiten

2.2.1. Kenntnis, daß ein Ereignis eine Teilmenge der Ergebnismenge ist	$E \subset G$	

2.2.2. Kenntnis, daß einelementige Ereignisse Elementarereignisse heißen	Elementarereignis	
2.2.3. Fähigkeit, die relativen Häufigkeiten von Ereignissen zu berechnen	$E_1 \cap E_2$ $E_3 \cup E_4$	Hier ist Gelegenheit, die Kenntnisse aus der Mengenlehre aufzufrischen
2.2.4. Kenntnis, daß die Summe der relativen Häufigkeiten aller Elementarereignisse eines Zufallsexperimentes 1 ist		
2.2.5. Kenntnis, daß zwei Ereignisse "elementefremd" sind, wenn ihre Schnittmenge leer ist	$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ elementefremd	
2.2.6. Fähigkeit, Ereignisse zu Zufallsexperimenten zu finden und sie als Mengen zu notieren	Gewinnregel beim Einmaligen Würfeln: "Alle geraden Primzahlen" $E = \{2\}$	Hier kann von Aussagen (etwa als Gewinnregel bezeichnet) ausgegangen werden, die als Mengen aufgeschrieben werden
2.2.7. Kenntnis, daß die relative Häufigkeit des sicheren Ereignisses 1 ist und die des unmöglichen Ereignisses 0		Hier können Gewinnregeln angegeben werden, die keine Chance haben und so die relative Häufigkeit o ergeben Beispiel: "Eine gerade Primzahl größer als zwei würfeln"
2.2.8. Kenntnis des Begriffs "gleichwahrscheinlich"		

2.2.9. Fähigkeit, zwischen Zufallsexperimenten mit gleichwahrscheinlichen und denen mit nicht gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen zu unterscheiden

2.3. Wahrscheinlichkeiten und ihre Berechnung

2.3.1. Kenntnis, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses sich bei genügend vielen Versuchen an eine bestimmte Zahl annähert

2.3.2. Kenntnis, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses eine Schätzung ist

2.3.3. Fähigkeit, bei gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Quotient aus "Anzahl der Elemente des Ereignisses" und "Anzahl der Elemente der Ergebnismenge" zu berechnen

$P(E) = \frac{k}{n}$ mit

$k = |E|$

$n = |G|$

Beispiel:
Würfeln
E : "Gerade Zahl"
$E = \{2,4,6\}$
$p(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2.3.4. Kenntnis, daß die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses 1 ist und die des unmöglichen Ereignisses 0

$P(G) = 1$
$P(\emptyset) = 0$

2.3.5. Einsicht in die Additionsregel von elementefremden Ereignissen

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

2.3.6. Fähigkeit, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen zweistufiger Zufallsexperimente zu berechnen

Beispiel:
E: "Die Augensumme ist größer als 11"
$E = \{(6,6)\}$
$P(E) = \frac{1}{36}$

Hier eignen sich Urnenziehungen mit Zurücklegen
Ebenso der zweimalige Würfelwurf (Augenzahl, Augensumme)

In diesem Stadium muß viel geübt werden Baum- und Gitterdiagramme sollen zu jedem Experiment gezeichnet werden, um die Ergebnismenge anschaulich darstellen zu können, die Elemente von Ereignissen abzählen zu können

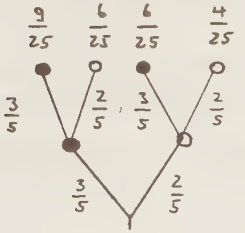
2.4. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm

2.4.1. Fähigkeit, vereinfachte Baumdiagramme zu zeichnen und die Wahrscheinlichkeiten in die Zweige zu schreiben

Beispiel
Urnenmodell
(3 schwarze, 2 weiße Kugeln)

2.4.2. Fähigkeit, vereinfachte Baumdiagramme für zweistufige Zufallsexperimente zu zeichnen und die Wahrscheinlichkeiten in die Zweige zu schreiben

Urne wie oben:



2.4.3. Fähigkeit, die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen mit der Pfadregel zu berechnen

		Pfadregel: Werden längs eines Pfades im Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zweige des Pfades multipliziert, so erhält man die Wahrscheinlichkeit des Pfades
2.4.4. Kenntnis, daß die Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten 1 ist	Pfadregel Pfadwahrscheinlichkeit	Man sollte hier immer wieder ein ausführliches Diagramm (Projektor/Folie) über das vereinfachte legen, um die Schüler daran zu erinnern, daß keine Elementarereignisse vorliegen müssen. Dabei werden z.B. die Kugeln nummeriert
2.4.5. Fähigkeit, die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen eines zweistufigen Zufallsexperimentes ohne Zurücklegen zu berechnen		

4.3.2.2. Handreichungen für den Lehrer

1. Absolute und relative Häufigkeit

Der Fragebogen auf Seite 1 des Schülerskriptums (hier S. 156) dient als Einstieg. Mit seiner Hilfe kann eine Urliste mit Daten der Klasse zusammengetragen werden. Über das Erstellen einer Strichliste für die Frage 8 des Fragebogens und den Vergleich der Anteile der eigenen und der fremden Klasse soll der Begriff der relativen Häufigkeit erarbeitet werden.
Im Anschluß können die restlichen Fragen z.B. mit Daten der Parallelklasse verglichen werden.

Auf der dritten Seite unten wurde Platz gelassen. Hier soll der in der Klasse erarbeitete Verlaufsplan von der Urliste bis zur relativen Häufigkeit eingetragen werden.

Die relativen Häufigkeiten sollten hier sowohl als gemeine Brüche als auch als Dezimalbrüche (bzw. in Prozenten) ausgerechnet werden. Das ergibt gleichzeitig eine gute Übung des Umrechnens von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche (bzw. Prozente).
Aufgabe 2 soll noch einmal an die Summenkontrolle erinnern.
Zur Vertiefung des Begriffs der relativen Häufigkeit und zur Anbahnung des Prinzips der großen Zahlen sind die Aufgaben 3 und 4 gedacht.

Die Häufigkeiten der Tabelle von Aufgabe 3d sind die folgenden:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	187	244	204	155	210	200

Einen noch größeren Stichprobenumfang erhält man leicht, wenn die Ergebnisse der Tabelle 3a von allen Schülern zusammengezählt werden. Damit müßte dann i.a. die Stabilisierung der relativen Häufigkeit gut zu erkennen sein.

Bei Aufgabe 5 sollen vier Gruppen gebildet werden. Das

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Schülern schon früh klarzumachen, daß nicht bei allen Zufallsexperimenten gleichwahrscheinliche Elementarereignisse auftreten.

Folgende Lernziele sollen bis hierher erarbeitet werden:

1.1. Fähigkeit, aus einer Urliste die relativen Häufigkeiten von bestimmten Merkmalsausprägungen auszurechnen.

1.2. Fertigkeit, die relative Häufigkeit in einem Blockdiagramm darzustellen.

1.3. Sicherheit im Ausführen von Zufallsexperimenten.

1.4. Kenntnis, daß man bei Zufallsexperimenten nicht das einzelne Ergebnis voraussagen kann.

1.5. Kenntnis, daß sich die relative Häufigkeit mit wachsendem Stichprobenumfang stabilisiert.

2. Zufall und Wahrscheinlichkeit

2.1. Zufallsexperimente und ihre Ergebnismengen

In diesem Abschnitt kommen Lernziele der 5. Klasse zur Wiederholung; die Lernziele 2.1. bis 2.9., S. 114 und 115. Auf ihrer Kenntnis bauen die folgenden Abschnitte auf. Falls die Schüler im Vorjahr keinen Stochastikunterricht hatten, ist hier Gelegenheit, das Fehlende nachzuholen. (Bei der Erprobung wird dies z.B. der Fall sein.)

Es werden nochmals Baumdiagramme zu jedem Zufallsexperiment gezeichnet, die Ergebnismengen mit ihrer Hilfe bestimmt und Gewinnchancen geordnet.
Zuerst sollte mit einem Glücksrad oder einem Kreisel einige Zeit gespielt werden. (Vgl. auch die verschiedenen Hilfsmittel im "Mathematischen Labor", Klett-Verlag 1972) Anschließend empfiehlt es sich, zu 'Gedankenexperimenten' überzugehen.

Bei Aufgabe 2d ist neu, daß auf die gemeinsame Struktur verschiedener Zufallsexperimente hingewiesen wird. Hier soll das Lernziel 2.1.4. "Fähigkeit, bekannte Zufallsexperimente auf das Urnenmodell zu übertragen" erarbeitet werden.

2.2. Ereignisse und ihre relativen Häufigkeiten

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe erarbeitet, mit deren Hilfe der Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt werden soll.
Aufgabe 1 führt hin zum Begriff 'Ereignis' und 'Elementarereignis'. Das Glücksrad von Seite 163 wird hier wieder verwendet. Auf tatsächliches Spielen sollte aber nun verzichtet werden und mehr Gewicht auf das Aufstellen von 'Gewinnregeln' gelegt werden. Die Gewinnregeln sollen in Form von verbalen Aussagen, als Mengen, aber auch als Aussageformen geschrieben werden. (Aufgabe 2)

In Aufgabe 3 werden die relativen Häufigkeiten von Ereignissen (und deren Verknüpfungen) berechnet und im Anschluß daran der Begriff 'elementefremd' erarbeitet.
Die Tabelle von S. 161 soll hier erneut benützt werden. Vor der allgemeinen Schreibweise auf S. 169 sollen zuerst die Werte aus der Tabelle eingesetzt werden. So kann der Begriff des 'sicheren Ereignisses' ohne Probleme eingeführt werden, ebenso der des'unmöglichen Ereignisses'.

Mit Hilfe der Aufgabe 4, die ja den Schüler auffordert, selbst Ereignisse und deren Verknüpfungen zu formulieren, sollen die erarbeiteten Begriffe gefestigt werden.

Aufgabe 6 stellt eine zusammenfassende Wiederholung des ganzen Abschnitts dar und gleichzeitig eine Hinführung zum nächsten Abschnitt, in dem der Wahrscheinlichkeitsbegriff erarbeitet wird. Hier sollen die Werte der ganzen Klasse (Vgl. Aufgabe 5d, S. 166 'Dreimaliger Münzwurf') verwendet werden und mit ihrer Hilfe die Stabilisierung der relativen Häufigkeit von den Schülern selbst erkannt

werden. Hier kann auch immer wieder auf die Würfelexperimente verwiesen werden.
Am Ende dieses Abschnitts müssen folgende Lernziele erreicht sein:

2.2.1. Kenntnis, daß ein Ereignis eine Teilmenge der Ergebnismenge ist.

2.2.2. Kenntnis, daß einelementige Ereignisse Elementarereignisse heißen.

2.2.3. Fähigkeit, die relativen Häufigkeiten von Ereignissen zu berechnen

2.2.4. Kenntnis, daß die Summe der relativen Häufigkeiten aller Elementarereignisse eines Zufallsexperiments gleich 1 ist.

2.2.5. Kenntnis, daß zwei Ereignisse elementefremd sind, wenn ihre Schnittmenge leer ist.

2.2.6. Fähigkeit, Ereignisse zu Zufallsexperimenten zu finden und sie als Mengen zu notieren.

2.2.7. Kenntnis, daß die relative Häufigkeit des sicheren Ereignisses 1 ist und die des unmöglichen Ereignisses 0.

2.2.8. Kenntnis des Begriffs 'gleichwahrscheinlich'.

2.2.9. Fähigkeit, zwischen Zufallsexperimenten mit gleichwahrscheinlichen und denen mit nicht gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen zu unterscheiden.

Am Ende dieser Unterrichtseinheit empfiehlt sich eine Lernzielkontrolle, um eventuelle Schwächen vor Beginn des nächsten Abschnitts noch beheben zu können.

2.3. Wahrscheinlichkeiten und ihre Berechnung

Bevor in diesem Abschnitt mit dem Berechnen von Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ereignisse begonnen wird und dann auch immer wieder während der Übungsphasen muß seitens des Lehrers betont werden, daß die Wahrscheinlichkeit eine

Voraussage auf eine noch bevorstehende Stichprobe macht, während die relative Häufigkeit das Resultat einer durchgeführten Stichprobe ist.
Bei Aufgabe 1 (S.172) sollten die berechneten Wahrscheinlichkeiten immer noch mit den Ergebnissen von Aufgabe 3 (S.161) verglichen werden, um obige Unterscheidung zu bekräftigen.
Aufgabe 2 ist die zweite grundlegende Aufgabe dieses Abschnitts. Sie bringt etwas größere Schwierigkeiten durch die Kugeln in zwei Farben und soll nur noch als Gedankenexperiment durchgearbeitet werden. Der Abstraktionsprozeß wird im Laufe dieses Abschnitts laufend etwas weitergeführt.
Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten von Aufgabe 3d kann auch als Übung für die Umrechnung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche (Prozente) gesehen werden. (Ebenso alle folgenden Aufgaben.)
Aufgabe 4 beschäftigt sich mit dem zweimaligen Würfelwurf. Hier werden auch Ereignisse von Augensummen betrachtet. Die Tabelle unter 4c enthält alle geordneten Paare dieses Experimentes und am Rand die Augensummen. So können die Schüler die Anzahl der gleichen Augensummen leicht ablesen. Jeder Schüler soll aber auch fähig sein, mit Hilfe der selbst notierten Ergebnismenge die Augensummen abzuzählen.

Die Aufgaben 5 bis 10 sind Übungsaufgaben, die zum Teil als Hausaufgaben bearbeitet werden können.
Aufgabe 12 (S.177) sollte wieder im Unterricht behandelt werden. Sie ist zur Verlaufsmotivation eingefügt und soll durch ihr Spielangebot eine Unterbrechung des vielen Berechnens von Wahrscheinlichkeiten bringen. Sie steht am Ende dieses Abschnitts, kann aber gut vor bzw. zwischen den Aufgaben 5 bis 11 eingebaut werden.
Folgende Lernziele sollen jetzt erarbeitet sein:

2.3.1. Kenntnis, daß die relative Häufigkeit eines Ereignisses sich bei genügend vielen Versuchen an eine bestimmte Zahl annähert.

2.3.2. Kenntnis, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses eine Schätzung ist.

2.3.3. Fähigkeit, bei gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Quotient aus 'Anzahl der Elemente des Ereignisses' und 'Anzahl der Elemente der Ergebnismenge' zu berechnen.

2.3.4. Kenntnis, daß die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses 1 ist und die des unmöglichen Ereignisses 0.

2.3.5. Einsicht in die Additionsregel von elementefremden Ereignissen.

2.3.6. Fähigkeit, Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen zweistufiger Zufallsexperimente zu berechnen.

Lösungen der Aufgaben:

S. 172 1a) 5/6
1b) 1/2
1c) 1/2
1d) 1/3
1e) 0
1f) 0
1g) 1/6

S. 173 2d) 9/25 4/25 2/5 12/25 9/25 2/5 2/5

3) 1/8 1/2 1/4 1/8 1/2

S. 175 4d) 1/6 5/6 1/36 4/9 0 1/3 1/6 25/36

5/18 0

5) z.B.: 'Erste Ziehung b"

6) 1/20 19/20

7) 11/13

8) 1/7 6/7 6/7 1/7 0

S. 176 10) 4
3
5

11) 5 Kugeln müssen rot sein.

S. 177 12) 6-mal
d
2,4,8,16,32,64
1/64

2.4. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm

Die Einführungsaufgabe dieses Abschnitts beinhaltet wieder eine Spielmöglichkeit für die Schüler. (Leere, symmetrische Würfel, die man entsprechend beschriften kann, und die für dieses Spiel benötigt werden, enthält das 'Mathematische Labor') Erst nach einer Problemlösung durch das Spielen sollen die Gewinnpfade berechnet und schließlich die Pfadregel formuliert werden.
Als Vorübung für diese Aufgabe empfiehlt es sich, das vereinfachte Baumdiagramm - etwa beim Würfeln nur Treffer und Niete unterscheiden - einzuführen. Das ausführliche Diagramm sollte man zur Kontrolle immer wieder in Erinnerung bringen. Wenn man beide Diagramme auf Folien zeichnet, kann man sie auf dem Tageslichtprojektor zu diesem Zweck z.B. übereinanderlegen.

Die Aufgaben 2 bis 8 dienen zur Übung und Vertiefung der Pfadregel im Modell 'mit Zurücklegen'.
In Aufgabe 2 sind die Kugeln unterscheidbar, in Aufgabe 3 nicht. Diese Fragestellung wird dann in Aufgabe 4 zusammengefaßt wiederholt, sodaß sich diese Aufgabe als Hausaufgabe und Lernzielkontrolle empfiehlt.

Bei Aufgabe 9 und 10 wird nach der ersten Ziehung das Kärtchen nicht mehr zurückgelegt.
Hier sollte anfangs wieder mit dem ausführlichen Diagramm gearbeitet werden. Ebenso sollte die Urne stets dazugezeichnet werden und das gezogene Kärtchen gestrichen werden, um die Tatsache der veränderten Kärtchenmenge in der Urne zu symbolisieren.
Folgende Lernziele sollen am Ende dieses Abschnitts

erreicht sein:

2.4.1. Fähigkeit, vereinfachte Baumdiagramme zu zeichnen und die Wahrscheinlichkeiten in die Zweige zu schreiben.

2.4.2. Fähigkeit, vereinfachte Baumdiagramme für zweistufige Zufallsexperimente zu zeichnen und die Wahrscheinlichkeiten in die Zweige zu schreiben.

2.4.3. Fähigkeit, die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen mit der Pfadregel zu berechnen.

2.4.4. Kenntnis, daß die Summe aller Pfadwahrscheinlichkeiten 1 ist.

2.4.5. Fähigkeit, die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen eines zweistufigen Zufallsexperimentes ohne Zurücklegen zu berechnen.

Lösungen der Aufgaben:

S.180 2c) 1/9 4/9 4/9 1/3

S.181 3c) 1/9 1/3 4/9 5/9

S.182 4b) 9/25 6/25 6/25 4/25

4d) 9/25 6/25 6/25 4/25

S.183 5) 25/36

6) 3/6 . 1/6 = 1/12

S.184 7b) 9/25 6/25 6/25 4/25

8b) 9/25 6/25 6/25 4/25

S.185 9) 6/20 6/20 6/20 2/20

Schülerbuch zum Lehrgang "Stochastik"
für die 6. Jahrgangsstufe

1. Absolute und relative Häufigkeit

2. Zufall und Wahrscheinlichkeit

2.1. Zufallsexperimente und ihre Ergebnismengen

2.2. Ereignisse und ihre relativen Häufigkeiten

2.3. Wahrscheinlichkeiten und ihre Berechnung

2.4. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten
im Baumdiagramm

1. Absolute und relative Häufigkeit

1. Die Klasse 6 c einer Augsburger Schule hat folgenden Fragebogen entworfen:

1. In welchem Jahr bist du geboren?

1966	1967	1968	1969

2. In welchem Monat hast du Geburtstag?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

3. a) Wie groß bist du? _____ b) Schuhgröße? _____

4. Wie lange hast du letzte Woche für die Hausaufgaben gebraucht?

Mo	Die	Mi	Do	Fr	Sa	So	
							Min.

5. Wieviele Kinder seid ihr in der Familie? _____

6. Habt ihr ein Haustier?

Hund	Katze	Hamster	Meerschweinchen	Vogel

7. Bist du Fahrschüler?

ja	nein

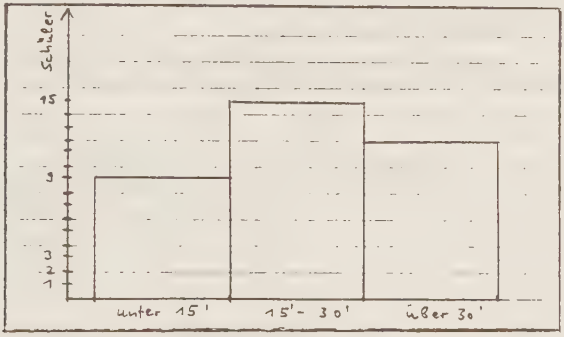
8. Wie lange bist du von zu Hause bis zur Schule unterwegs?

unter 15 Minuten	15 bis 30 Min.	über 30 Minuten

a) Die Klasse 6c besuchen 36 Schüler.
Folgende Strichliste ergab sich bei der Auswertung der Frage 8:

Merkmalsausprägung	absolute Häufigkeit	
unter 15 Min	𝍸 ////	9
15 bis 30 Min.	𝍸 𝍸 𝍸	15
über 30 Min.	𝍸 𝍸 //	12
		36

Im Anschluß stellten die Schüler die absoluten Häufigkeiten in einem Blockdiagramm dar:



b) Fülle jetzt den Fragebogen aus.

c) Die Ergebnisse der Frage 8 in der Klasse 6c sollen jetzt mit den Ergebnissen in deiner eigenen Klasse verglichen werden.
Erstelle zuerst wie in a) eine Strichliste und ein Blockdiagramm mit den Häufigkeiten deiner Klasse.

Ist der Vergleich der absoluten Häufigkeiten beider Klassen eine gute Vergleichsmethode?

Hilfe: Denke an die unterschiedlichen Klassenstärken!

Diskutiere mit deinen Mitschülern und suche nach einer geeigneten Methode.

d) Relative Häufigkeit

In der Klasse 6c sind 9 von 36 Schülern weniger als 15 Min. unterwegs, das entspricht 9/36

15 von 36 Schülern sind 15 bis 30 Min. bis zur Schule unterwegs, das entspricht 15/36

12 von 36 Schülern über 30 Min. bis zur Schule unterwegs, das entspricht 12/36

In deiner Klasse sind ____ von ____ Schülern weniger als 15 Min. unterwegs, das entspricht

____ von ____ Schülern 15 bis 30 Min. bis zur Schule unterwegs, das entspricht

____ von ____ Schülern über 30 Min. bis zur Schule unterwegs, das entspricht

	6c	eigene Klasse
Merkmalsausprägung	relative Häufigkeit	relative Häufigkeit
unter 15 Min.		
15 bis 30 Min.		
über 30 Min.		

Diskutiere die Ergebnisse, erstelle einen Plan, wie man von einer Strichliste bis zur Feststellung der relativen Häufigkeit gelangt und formuliere einen Merksatz für die Berechnung der relativen Häufigkeit.

e) Zeichne die Blockdiagramme der relativen Häufigkeiten und vergleiche sie mit den Blockdiagrammen der absoluten Häufigkeiten. Was fällt auf?

f) Werte einige der restlichen sieben Fragen in gleicher Weise aus.

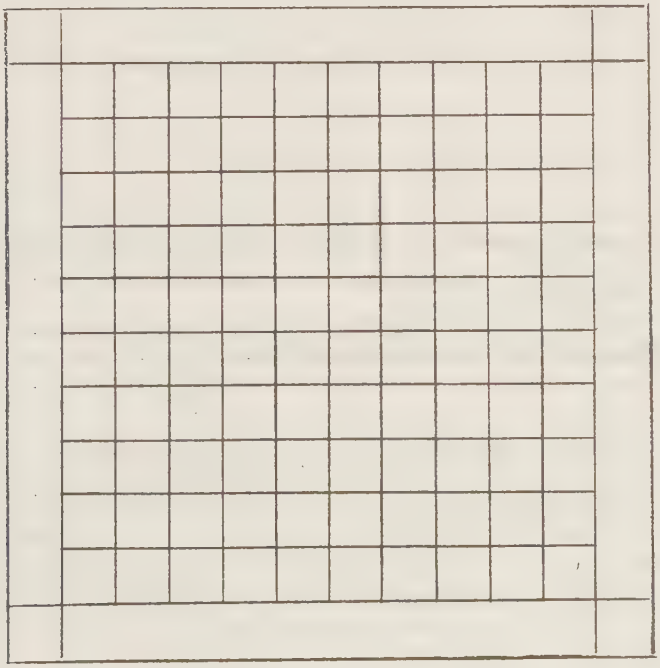
g) Vielleicht füllt eine andere 6. Klasse den gleichen Fragebogen aus und ihr könnt in Gruppenarbeit die einzelnen Fragen auswerten und schließlich die relativen Häufigkeiten vergleichen.

2. Bei einer Befragung von 150 Schülern interessierte man sich auch für ihre Hobbys.

Es wurde angegeben: Von 26 Schülern Fußballspielen,
80 Schülern Popmusik hören,
20 Schülern Lesen,
22 Schülern Schachspielen,
18 Schülern Fotografieren,
104 Schülern Fernsehen.

Wie erklärst du dir das Ergebnis der Summenkontrolle?

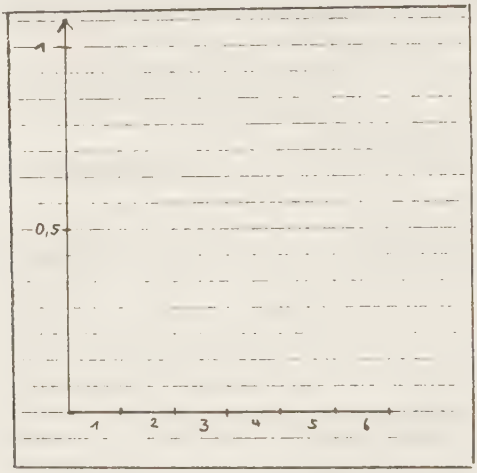
3. a) Würfle 100-mal mit einem Spielwürfel und notiere in der Tabelle die Ergebnisse:



b) Übertrage die Häufigkeiten der sechs Augenzahlen in folgende Tabelle und notiere darunter die relativen Häufigkeiten:

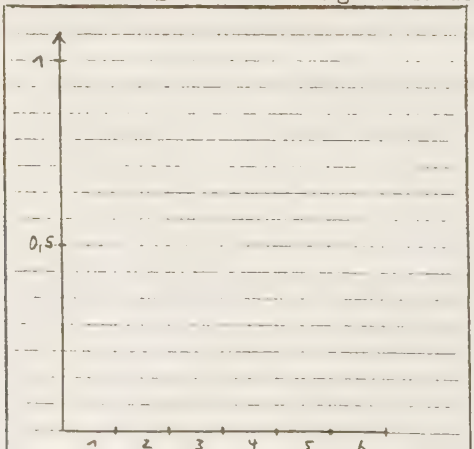
Augenzahl	1	2	3	4	5	6	
absolute Häufigkeit							
relative Häufigkeit							

c) Veranschauliche im Blockdiagramm die relativen Häufigkeiten



d) Auf der nächsten Seite findest du eine Tabelle, in der 1200-mal die jeweils geworfene Augenzahl eingetragen wurde.

Schreibe die absoluten und die relativen Häufigkeiten in die darunter vorbereitete Liste.
Schließlich zeichne das Blockdiagramm unter dasjenige von Aufgabe c) auf dieser Seite und vergleiche die beiden Diagramme.



	5					10					15					20					25					30				
	4	5	2	6	1	6	5	5	5	5	1	1	6	6	1	3	6	2	3	5	2	2	5	1	5	2	2	1	3	3
	5	5	3	1	2	4	6	1	1	4	1	6	5	4	6	2	6	6	5	3	6	5	2	5	6	2	2	5	5	3
	3	5	2	6	2	4	6	1	3	2	5	2	3	3	1	6	5	6	3	2	4	3	6	2	2	6	5	5	2	4
	2	1	3	2	5	3	5	5	5	3	1	2	2	3	6	5	2	5	1	5	6	4	3	4	3	5	4	4	5	2
5	3	1	5	3	1	1	6	1	1	3	3	1	2	5	6	4	1	1	6	1	2	5	3	1	1	4	4	3	5	4
	6	6	5	3	5	2	4	5	1	2	5	2	4	2	4	3	6	5	3	5	5	2	1	4	6	4	3	6	2	6
	2	5	2	4	1	3	2	4	4	1	5	5	6	1	6	5	3	6	2	3	6	5	5	4	5	4	6	3	1	1
	6	2	2	5	6	3	1	3	1	1	4	4	3	2	3	5	2	6	3	2	2	3	2	2	3	2	6	3	4	4
	4	3	1	6	2	2	5	2	4	6	2	2	3	5	6	5	1	6	3	5	3	6	3	2	2	5	2	5	2	2
10	1	1	1	5	3	2	1	2	6	2	3	2	3	6	6	6	5	2	2	6	1	6	4	2	5	1	5	1	5	2
	6	1	2	6	3	3	3	6	6	6	4	1	2	4	6	1	2	3	3	1	2	2	4	5	6	6	3	5	3	1
	2	6	5	6	3	5	3	3	1	6	3	6	1	3	6	3	4	4	6	5	6	3	3	3	3	3	2	3	3	5
	3	6	2	4	2	3	4	2	5	6	2	1	3	1	4	2	3	6	6	3	2	2	1	5	5	4	4	5	2	5
	4	5	6	3	3	5	1	3	4	4	2	2	6	4	6	1	5	2	1	3	4	4	5	1	6	4	1	5	1	3
15	3	4	1	3	6	1	3	6	4	5	4	2	2	5	2	4	1	6	2	1	3	5	5	3	6	4	2	6	2	4
	4	4	1	6	2	5	4	5	5	5	1	3	6	1	5	5	1	6	4	4	5	3	2	2	6	2	5	5	1	3
	5	3	5	5	5	2	3	2	3	6	1	1	2	5	4	6	5	1	4	2	1	5	5	4	2	5	6	3	1	3
	3	4	2	1	2	5	4	6	6	5	2	1	3	4	3	1	1	5	3	3	6	4	3	4	1	6	2	2	2	2
	4	5	4	4	2	1	6	2	1	4	1	3	6	1	4	1	6	2	2	3	6	4	3	2	2	6	1	3	1	3
20	1	3	1	2	1	1	5	2	2	2	2	2	6	5	2	1	3	4	5	5	6	2	2	4	2	3	3	3	2	3
	5	1	6	3	3	6	5	2	1	6	1	1	1	6	2	5	4	5	1	5	1	1	1	2	4	6	1	2	1	5
	2	2	2	4	1	4	6	6	5	3	4	5	1	2	6	6	2	4	1	5	1	1	3	1	3	4	1	6	2	4
	2	2	2	5	6	5	6	6	6	1	2	4	3	6	1	2	4	6	3	2	6	5	6	1	3	2	4	6	5	2
	4	5	1	6	2	6	5	5	5	5	1	6	5	2	1	3	4	6	6	5	2	6	2	1	5	2	1	5	2	6
25	6	6	4	4	4	5	3	6	6	2	2	4	6	4	6	6	3	5	2	1	5	5	4	1	2	2	5	6	3	1
	3	1	1	3	2	1	5	6	5	2	6	2	6	2	3	1	1	1	2	2	4	1	6	5	3	6	3	2	1	1
	1	1	3	3	5	4	3	5	5	4	3	2	6	1	5	3	2	6	1	3	4	3	2	3	3	4	3	5	2	2
	5	2	1	1	5	2	1	5	2	5	1	6	1	3	6	5	1	5	2	2	2	6	2	3	2	4	1	5	1	3
	6	1	1	2	6	6	2	5	5	4	6	4	2	6	2	6	5	3	5	3	1	6	6	5	5	2	5	1	5	4
30	1	2	2	4	1	4	5	1	5	2	6	4	4	1	6	1	3	2	6	6	2	2	5	6	5	2	1	3	4	4
	4	4	5	6	4	5	6	3	4	4	3	6	3	2	2	3	1	1	2	3	3	1	3	2	3	6	1	6	3	3
	5	2	2	6	4	4	1	3	1	6	3	2	3	6	2	5	5	4	3	1	1	1	5	6	4	5	4	3	5	3
	3	6	3	3	3	2	2	6	4	5	4	3	3	1	5	1	6	1	2	1	3	6	2	1	3	4	4	6	5	6
	3	2	4	2	4	2	3	3	2	3	2	3	5	1	3	4	3	2	4	6	3	3	5	2	4	6	5	1	2	2
35	4	6	4	6	3	2	6	3	3	6	6	4	5	3	6	1	2	1	6	5	2	5	2	5	6	5	1	5	2	6
	3	4	5	2	2	2	2	1	4	4	6	4	2	1	3	4	6	2	5	5	6	5	5	3	5	5	2	6	4	5
	5	4	2	6	4	3	4	3	6	1	2	2	5	4	1	3	3	2	3	5	1	2	6	5	3	2	2	2	5	5
	2	5	6	1	4	4	4	6	4	6	2	6	3	3	3	1	5	6	3	2	1	2	1	3	2	2	2	2	2	5
	3	1	1	2	5	1	3	6	3	2	6	2	5	5	2	3	5	4	3	1	6	5	6	4	6	6	1	3	3	5
40	4	5	5	6	4	3	5	4	5	6	3	4	1	2	2	6	6	3	2	5	2	5	3	4	4	4	2	1	2	2

1)

Augenzahl	1	2	3	4	5	6	
absolute Häufigkeit							
relative Häufigkeit							

e) Vergleiche die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen 1 bis 6 bei 100 Würfen und bei 1200 Würfen.
Was fällt dir auf?

4. Würfle 100-mal mit einem Würfel, auf dem anstelle der Augenzahl "6" eine Eins steht.
Berechne die relativen Häufigkeiten der Augenzahlen 1 bis 5.

Augenzahl	1	2	3	4	5
relative Häufigkeit					

5. Zur Bearbeitung dieser Aufgabe sollen vier Gruppen gebildet werden, um in jeder Gruppe eines der vier Zufallsexperimente 200-mal durchzuführen:

Werfen eines Achter-Legosteins (Schreibe die Ziffern auf die Flächen)						
Lage	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit						
relative Häufigkeit						

Werfen eines Reißnagels		
Lage		
absolute Häufigkeit		
relative Häufigkeit		

Werfen einer Münze		
Lage	Wappen	Zahl
absolute Häufigkeit		
relative Häufigkeit		

Werfen eines geeigneten Gegenstandes nach Wahl	
Lage	
absolute Häufigkeit	
relative Häufigkeit	

Schreibe die Resultate aller Gruppen in die Listen.
Vergleiche die Häufigkeiten der vier Zufallsexperimente.

2. Zufall und Wahrscheinlichkeit

2.1. Zufallsexperimente und ihre Ergebnismengen

Peter ist in der Jugendgruppe eines Schützenvereins. Bei 10 Schüssen trifft er 8 bis 9 mal ins Schwarze. Er gehört zu den guten Schützen in seiner Gruppe.

Peters Schwester Brigitte bekam von ihrem Onkel ein Glücksrad geschenkt. Sie spielte mit Peter und gewann bei 10 Spielen 7 mal.

grün: 1,3,5,7
rot: 2,6
blau: 4,8

1. a)
Ordne die folgenden Spiele in die freien Spalten der Tabelle ein:

Ringe über Stöcke werfen; Werfen eines Reißnagels; Dosen werfen; Zahlenlotto; Schach; Münzwurf; Memory; Schwarzer Peter; Sackhüpfen; Würfeln; Glücksrad drehen; Kartenspiele; Mensch ärgere dich nicht; Knobeln;

Geschicklichkeit	Zufall	teils-teils

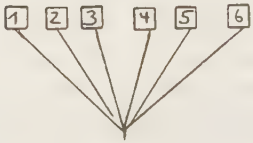
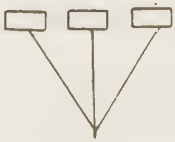
Beim Drehen eines Glücksrades, beim Würfeln, beim Münzwurf, beim Reißnagelwerfen usw. kann man das Ergebnis nicht voraussagen.
Man nennt solch ein Experiment daher ein Zufallsexperiment.

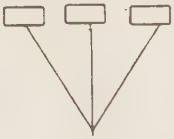
b) Schreibe in die Tabelle Zufallsexperimente und suche dazu die möglichen Ergebnisse. Schreibe alle möglichen Ergebnisse in Mengenklammern:

Zufallsexperiment	

Diejenige Menge, deren Elemente alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind, heißt Ergebnismenge des Zufallsexperiments.
$G = \{e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n\}$

c) In einem B a u m d i a g r a m m kann man die Elemente der Ergebnismenge übersichtlich darstellen. Vervollständige die letzten drei Diagramme:

Zufallsexperiment	Baumdiagramm
Münzwurf	
Würfeln	
Knobeln	

Zufallsexperiment	Baumdiagramm
Glücksrad drehen (Farben sind Ergebnisse)	
Glücksrad drehen (Zahlen sind Ergebnisse)	

d) Du darfst zu Beginn eines Spiels mit dem Glücksrad von Seite 8 die Gewinnfarbe wählen und zuerst drehen. Für welche Farbe wirst du dich entscheiden? Begründe deine Wahl.

e) Zeichne oder bastle selbst Glücksräder und erfinde Gewinnregeln dazu.

2. a) Vergleiche folgende Urnen.
Du darfst eine Urne aussuchen und dann blind eine Kugel ziehen. Weiß gewinnt.
Welche Urne wählst du?

b) Zeichne zu folgenden Urnen die Baumdiagramme und schreibe die Ergebnismengen auf.

c) Ordne die Urnen aus a) nach ihren Gewinnchancen.
Jetzt gewinnt "Schwarz".

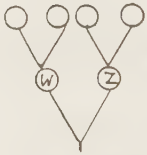
d) Übertrage die Zufallsexperimente von Aufgabe 1c, S. 9/10, auf das Urnenmodell:

Beispiel: Münzwurf - Ergebnismenge = $\{w,z\}$

3. Zufallsexperiment: Zweimaliges Werfen einer Münze

a) Ergebnismenge:

b) Baumdiagramm:



c) Wodurch unterscheiden sich die Ergebnisse (w,z) und (z,w)?

d) Dreimaliges Werfen einer Münze:

Führe das Experiment 20 mal durch, lege eine Strichliste an und suche mit deinen Mitschülern alle möglichen Ergebnisse.

Schreibe die Ergebnismenge auf und zeichne das zugehörige Baumdiagramm.

2.2. Ereignisse und ihre relativen Häufigkeiten

Ein Gewinn im Zahlenlotto "6 aus 49", dessen Ziehung du vielleicht im Fernsehen schon einmal mitverfolgt hast, ist immer ein großes Ereignis.

1. Peter und Brigitte spielen mit dem Glücksrad von S. 8.
   - Die Hauptgewinnregel heißt: "Der Pfeil zeigt auf die 2". Onkel Horst hat für den Hauptgewinn DM 2.- angesetzt.
   - Eine weitere Gewinnregel, für die DM 1.- angesetzt wurde, lautet: "Der Pfeil zeigt auf ein blaues Feld".
   - Der Trostpreis von 0.50 DM ist angesetzt, falls folgendes Ereignis eintritt: "Ungerade Zahl".

a) Suche zu den drei Gewinnregeln die Lösungsmengen:

E_1 =

E_2 =

E_3 =

b) Gib zu folgenden Ereignissen in der Ergebnismenge des Glücksrades $G = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ passende Gewinnregeln an:

$E_1 = \{1,3,5\}$ $E_2 = \{4,8\}$ $E_3 = \{7\}$ $E_4 = \{\}$

$E_5 = \{2,4,6,8\}$ $E_6 = \{3,6\}$ $E_7 = \{1,2,4,8\}$

Die Ergebnisse, die zum Ereignis "Gewinn" gehören, bilden eine Teilmenge der Ergebnismenge G

Die einelementigen Teilmengen der Ergebnismenge G heißen Elementarereignisse.

Beispiel: Beim Zufallsexperiment "Werfen eines Würfels" sind folgende Ereignisse die Elementarereignisse:
$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$ $\{5\}$ $\{6\}$.

2. Suche möglichst viele Ereignisse, die beim einmaligen Würfeln als Gewinnregel aufgestellt werden können. Formuliere für jede Gewinnregel eine Aussageform:

Ereignis	Gewinnregel	Aussageform
$\{2,4,6\}$	"Gerade Augenzahl"	x ist gerade, mit $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$

3. In Aufgabe 3 auf Seite 4-6 hast du die relativen Häufigkeiten für die Elementarereignisse $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ bei Versuchsreihen von 100 und 1200 Würfen mit einem Würfel berechnet.

   a) Berechne mit Hilfe deiner Tabelle aus der Versuchsreihe von 1200 Würfen die relativen Häufigkeiten folgender Ereignisse:

Ereignis	relative Häufigkeit
$E_1 = \{1,3\}$ $E_2 = \{2,6\}$ $E_3 = E_1 \cup E_2$ $E_4 = \{2,4,6\}$ $E_5 = E_4 \cap E_2$ $E_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$ $E_7 = E_1 \cap E_2$	

   b) Vergleiche die Summe der relativen Häufigkeiten der Elementarereignisse mit der Häufigkeit von E_6. Was fällt auf?

   c) Vergleiche auch E_2 und E_4; ebenso E_1 und E_2.

Zusammenfassung:

a) In obiger Tabelle hast du festgestellt, daß die Ereignisse E_1 und E_2 keine gemeinsamen Elemente haben. Sie sind elementefremd. Ihre Schnittmenge ist die leere Menge.

b) In Aufgabe 1d) auf Seite 3 hast du bereits einen Merksatz aufgestellt, wie man die relativen Häufigkeiten (h) von Elementarereignissen aus ihren absoluten Häufigkeiten (H) bestimmt.

   Man bildet nämlich den Quotienten aus der absoluten Häufigkeit der Elementarereignisse und der Anzahl der durchgeführten Versuche, also

$$h = \frac{H}{m}$$

   , wobei m die Anzahl der durchgeführten Versuche ist. (Z.B. 1200-maliges Würfeln)

   Wir gewinnen daraus eine allgemeine Formel über die relativen Häufigkeiten der Elementarereignisse.

Sei $G = \{g_1, g_2, \ldots\ldots\ldots, g_n\}$; m bezeichne die Anzahl der Versuche.
Die zugehörigen Elementarereignisse seien

$E_1 = \{g_1\}$, $E_2 = \{g_2\}$, $E_3 = \{g_3\}$, ... , $E_n = \{g_n\}$

mit den absoluten Häufigkeiten

H_1, H_2, H_3, ... , H_n

und den relativen Häufigkeiten

$h_1 = \frac{H_1}{m}$, $h_2 = \frac{H_2}{m}$, $h_3 = \frac{H_3}{m}$, ... , $h_n = \frac{H_n}{m}$.

Dann gilt:

$H_1 + H_2 + H_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + H_n = m$

und daher

$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n = \frac{H_1}{m} + \frac{H_2}{m} + \frac{H_3}{m} + \ldots\ldots + \frac{H_n}{m} = \frac{m}{m} = 1$

Merke: Die Summe der relativen Häufigkeiten der Elementarereignisse eines Zufallsexperimentes hat den Wert 1.

c) Das Ereignis $E_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$ heißt das
sichere Ereignis.
Die relative Häufigkeit des sicheren Ereignisses ist 1.

d) Das Ereignis $E_7 = \{\}$ heißt das
unmögliche Ereignis.
Die relative Häufigkeit des unmöglichen Ereignisses ist 0.

4.

Denke dir verschiedene Ereignisse zu den Glücksrädern aus und bilde wie in Aufgabe 3a) auch Vereinigungsmengen und Schnittmengen.
Vergiß auch nicht das sichere und das unmögliche Ereignis.

5. Bei welchem der Zufallsexperimente, die bisher an der Reihe waren, besteht deiner Meinung nach "Chancengleichheit"? D.h. gleiche Wahrscheinlichkeit bei allen Elementarereignissen?

gleichwahrscheinlich	nicht gleichwahrscheinlich

Elementarereignisse eines Zufallsexperimentes, deren "Chancen" gleich sind, heißen gleichwahrscheinlich.

Man kann diese "Chancengleichheit" durch hinreichend viele Wiederholungen des Zufallsexperiments überprüfen.

6. a)
Die Ergebnismenge für den dreimaligen Münzwurf kennst du bereits. In Aufgabe 3d) auf Seite 11 hast du eine Strichliste angelegt. Benutze für die folgende Tabelle die Ergebnisse der ganzen Klasse.

Ereignis	rel.Häufigkeit
$E_1 = \{(w,w,w)\}$ $E_2 = \{(w,w,z)\}$ $E_3 = \{(w,z,w)\}$ $E_4 = \{(w,z,z)\}$ $E_5 = \{(z,w,w)\}$ $E_6 = \{(z,w,z)\}$ $E_7 = \{(z,z,w)\}$ $E_8 = \{(z,z,z)\}$ $E_9 = \{(w,w,w);\ (w,w,z);\ (w,z,w);\ (w,z,z)\}$ $E_{10} = \{(z,w,w);\ (z,w,z);\ (z,z,w);\ (z,z,z)\}$ $E_{11} = \{(w,w,w);\ (z,z,z)\}$	

Ereignis	rel.Häufigkeit
$E_{12} = E_9 \cap E_{10}$ $E_{12} = E_9 \cup E_{10}$	

b) In der Nähe welcher Brüche liegen die relativen Häufigkeiten bei genügend vielen Wiederholungen des Zufallsexperiments?

2.3. Wahrscheinlichkeiten und ihre Berechnung

In vielen verschiedenen Aufgaben hast du dir inzwischen über die relativen Häufigkeiten bei Zufallsexperimenten Gedanken gemacht und sie ausgerechnet.
Du weißt, daß die relativen Häufigkeiten immer zwischen o und 1 (Grenzen eingeschlossen) liegen.
Dasselbe soll daher auch für die Wahrscheinlichkeiten gelten.

Die relative Häufigkeit des sicheren Ereignisses ist 1, die des unmöglichen Ereignisses O. Das soll auch für Wahrscheinlichkeiten gelten.

Bei zwei elementefremden Ereignissen E_1 und E_2 haben wir gesehen, daß sich die relativen Häufigkeiten addieren.
Dasselbe soll auch für die Wahrscheinlichkeiten solcher Ereignisse gelten.

Sämtliche Elementarereignisse der Ergebnismenge $G = \{g_1, g_2, \ldots\ldots, g_n\}$ seien gleichwahrscheinlich und jedes habe die Wahrscheinlichkeit p .

Da sie elementefremd sind und ihre Vereinigung das sichere Ereignis ist, muß gelten: $\underbrace{p + p + \ldots\ldots + p}_{n\text{-mal}} = 1$

Also gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses : $p = \frac{1}{n}$.

Besteht ein Ereignis E aus k Elementarereignissen, so ist seine Wahrscheinlichkeit

$P(E)$ (sprich: P von E) gleich $k \cdot p = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$.

Es gilt also: $P(G) = 1$

$P(\emptyset) = 0$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$, falls E_1, E_2 elementefremd sind.

Bei gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen eines Zufallsexperiments heißt der Quotient

$$\frac{\text{Anzahl der Elemente eines Ereignisses } E}{\text{Anzahl der Elemente der Ergeonismenge } G}$$

die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Geschrieben P(E).

Beispiele: Zufallsexperiment: Einmaliges Würfeln
Ergebnismenge G = $\{1,2,3,4,5,6\}$
G hat 6 Elemente
Die Elementarereignisse $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$ $\{5\}$ $\{6\}$ sind gleichwahrscheinlich.

a) Das Ereignis $E_1 = \{5,6\}$ ist eine Teilmenge der Ergebnismenge G und es hat zwei Elemente.
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 ist also $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$P(E_1) = \frac{1}{3}$.

b) Das Ereignis $E_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$ ist eine Teilmenge von G und es hat 6 Elemente.
E_2 ist das sichere Ereignis.
$P(E_2) = \frac{6}{6} = 1$.

c) $E_3 = \{2,4,6\}$ $E_4 = \{1,3,5\}$
$E_5 = E_3 \cap E_4 = \emptyset$ E_5 ist das unmögliche Ereignis.
$P(E_5) = 0$

d) $E_6 = \{6\}$
$P(E_6) = \frac{1}{6}$.

Übungsaufgaben

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Würfeln einen Wurf zu erreichen von
   a) mindestens 2 Augen,
   b) höchstens 3 Augen,
   c) einer Primzahl,
   d) einer Augenzahl zwischen 2 und 5,
   e) der Augenzahl 7,
   f) einer geraden Zahl, aber kleiner 2
   g) einer geraden Primzahl?

2. Aus der Urne wird zweimal hintereinander eine Kugel blind gezogen:
Ziehen, Farbe und Ziffer notieren, zurücklegen, mischen und nochmals ziehen, notieren und zurucklegen.

a) Welche Kugelpaare können sich bei dieser Doppelziehung ergeben?

b) Zeichne das Baumdiagramm:

c) Schreibe die Ergebnismenge auf:
G = { }

d)
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

1. "beide weiß" $E_1 = \{$ $P(E_1) =$
2. "beide schwarz"
3. "erste schwarz"
4. "eine schwarz, eine weiß"
5. "keine schwarz"
6. "zweite schwarz"
7. "zweite weiß"

3. Ein Skatspiel besteht aus As, König, Dame, Bube, 10,9,8,7; wobei jede dieser Karten in den Mustern Kreuz, Pik, Herz und Karo vorkommt. Kreuz und Pik sind schwarz, Herz und Karo rot. Vor dem Ziehen einer Karte wird das Spiel gut gemischt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen

a) einer As-Karte,
b) einer roten Karte,
c) einer Karo-Karte,
d) einer 7-Karte,
e) einer Karte mit Zahlangabe?

4. Ein Würfel wird zweimal geworfen.

a) Welche Wurfpaare sind möglich?
Zeichne das Baumdiagramm und bestimme die Ergebnismenge.

b) Welche Augensummen sind möglich?

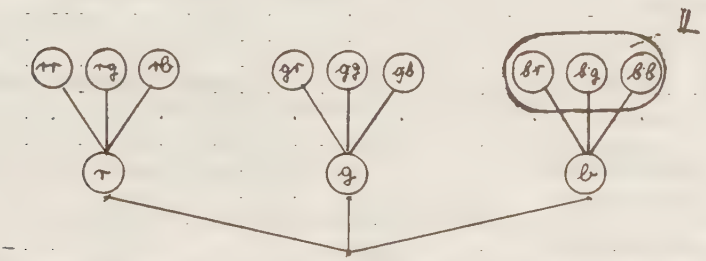
c) Deute die Tabelle:

	7	8	9	10	11	12
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

d) Berechne die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

1. "Zwei gleiche Augenzahlen"
2. "Zwei verschiedene Augenzahlen"
3. "Erster und zweiter Wurf ergibt Augenzahl 6"
4. "Die Augensumme ist 6 bis 8"
5. "Die Augensumme ist kleiner als 5 und größer als 9"
6. "Die Augensumme ist durch 3 teilbar"
7. "Die Augensumme ist gerade und durch 3 teilbar"
8. "Kein Wurf eine 6"
9. "Die Augensumme ist kleiner als 5 oder gleich 5"
10. "Die Augensumme ist 13"

5. Im folgenden Baumdiagramm ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer Gewinnregel hervorgehoben.
Suche eine passende Aussageform:



6. In einer Lotterie von 100000 Losen sind 5000 Gewinne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) einen Gewinn zu ziehen?
b) eine Niete zu ziehen?

7. In einer Klasse sind 26 Schwimmer und 4 Nichtschwimmer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein ins tiefe Wasser gefallener Schüler sich selbst retten kann?

8. In einer Urne liegen Karten, auf denen die Tage der Woche stehen.

a) Die Wahrscheinlichkeit, "Sonntag" zu ziehen, beträgt:

b) Die Wahrscheinlichkeit, einen Wochentag zu ziehen:

c) Die Wahrscheinlichkeit, einen Tag zu ziehen, dessen Name ein a enthält, beträgt:

d) Die Wahrscheinlichkeit, einen Tag zu ziehen, dessen Name zwei a enthält, beträgt:

e) Die Wahrscheinlichkeit, einen Tag mit weniger als sechs Buchstaben zu ziehen beträgt:

9. Aus nebenstehender Urne wird ein Buchstabe zufällig gezogen.

N	E	U	P	A
B	S	O	T	R

Beschreibe dieses Zufallsexperiment durch eine Tabelle und durch ein Baumdiagramm:

Ereignis	
Wahrscheinlichkeit	

Summe aller Wahrscheinlichkeiten:

10. Bei einem Zufallsversuch mit schwarzen, roten und gelben Kugeln ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten :

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12}$.

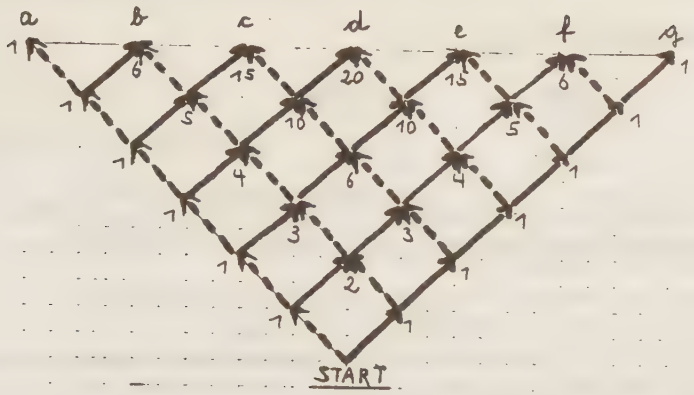
Wie viele schwarze, rote und gelbe Kugeln müssen in der Urne liegen? (Kreuze die richtige Tabelle an:

Schwarze Kugeln	6	4	3
rote Kugeln	4	3	4
gelbe Kugeln	3	5	5

11. In einer Urne liegen schwarze, gelbe und blaue Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen beträgt $\frac{1}{2}$, eine gelbe zu ziehen $\frac{1}{3}$. Wieviele von den insgesamt 30 Kugeln müssen rot sein?

12. Das Straßenspiel

Du brauchst einen Spielstein und eine Münze



2)

Setze auf den Start einen Spielstein. Wirfst du Wappen, dann darfst du einen schwarzen Weg bis zum Pfeilende (⟶) gehen. Wirfst du Zahl, dann darfst du einen gestrichelten Weg (⇢) bis zum Pfeilende gehen.

a) Wie oft mußtest du werfen, um bei einem der Buchstaben a bis g anzukommen?

b) Wo kommt man am wahrscheinlichsten an?
Vergleiche auch die Ergebnisse deiner Mitschüler.

c) Vergleiche das Straßenspiel mit der Aufgabe 3 (S.11) "Zwei- und dreimaliger Münzwurf".
Diskutiere mit deinen Mitschülern.
Die Zahlen im Straßenspiel haben eine ganz bestimmte Bedeutung. Kommst du dahinter?

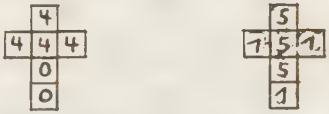
d) Wieviele Elemente hat die Ergebnismenge bei

1 Wurf	4 Würfen
2 Würfen	5 Würfen
3 Würfen	6 Würfen

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ohne Umwege, entweder mit 6 Würfen "Zahl" oder 6 Würfen "Wappen" zu a bzw. g zu gelangen?

2.4. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm

1. Zwei besondere Würfel

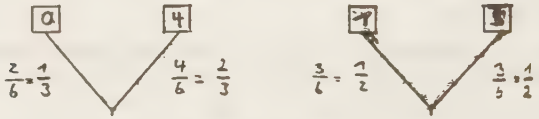


3)

a) Die Spielregel lautet: "Die größere Zahl gewinnt".
Spiele mit deinem Nachbarn 10 mal mit dem blauen Würfel, dann bekommt er den blauen und du den grünen Würfel.
Notiere die Gewinne in einer Tabelle.

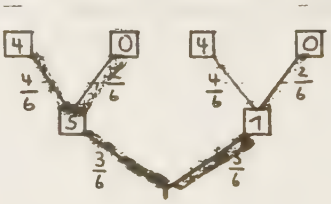
- Welche Farbe hat bei 20 Würfen öfters gewonnen?
- Vergleiche auch die Ergeonisse der ganzen Klasse.
- Vergleiche die relativen Häufigkeiten.
  Welcher Zahl nähert sich die relative Häufigkeit von "blau gewinnt" und die von "grün gewinnt" ?
  Welcher Würfel gewinnt öfter?

b) Baumdiagramme:



An den P f a d e n beider Baumdiagramme stehen die Wahrscheinlichkeiten.
Am Baum für den grünen Würfel enden $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ der Versuche beim Ereignis "1" und ebenso $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ der Versuche beim Ergebnis "5".
Beim blauen Würfel sind es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ für "0" und $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ für "4".

c) Baum für das gesamte Spiel "Grün gegen Blau":



Der Baum fur das gesamte Spiel veranschaulicht:

Drei Gewinnpfade fur "Grün": $\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} =$

$= \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

Nur einen Gewinnpfad für "Blau": $\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Vergleiche jetzt die relativen Häufigkeiten aus Aufgabe a).

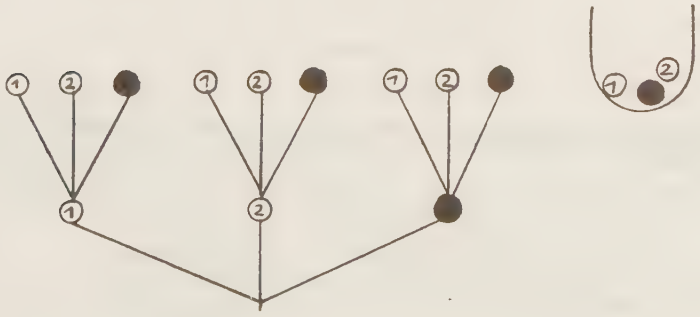
Werden längs eines Pfades im Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zweige des Pfades multipliziert, so erhält man die Wahrscheinlichkeit des Pfades.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade ist 1

d) Kontrolliere nochmals die gesamte Aufgabe 1 im Hinblick auf diese Regel.

2. In einer Urne befinden sich zwei weiße Kugeln, die mit -1- und -2- gekennzeichnet sind und eine schwarze Kugel.

Wir ziehen eine Kugel, notieren das Ergebnis, legen sie zurück, mischen und ziehen nochmals eine Kugel und notieren das Ergebnis:



a) Zeichne die Ergebnismenge dieses zweistufigen Zufallsexperimentes:

$G = \{(①,①)\ ;\ (①,②)\ ;\ (①,●)\ ;$

b) Schreibe die Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm.

c) Errechne mit Hilfe der Pfade und mit der Regel von Seite 24 die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1: "Zweimal schwarz" $P(E_1) =$

E_2: "Einmal schwarz"

E_3: "Keinmal schwarz"

E_4: "Erste Ziehung schwarz"

d) Schreibe die Aufstellung der Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments zu Ende und mache die Summenkontrolle:

$E_1 = \{(①,①)\}$ $P(E_1) =$

$E_2 =$

$E_3 =$

$E_4 =$

$E_5 =$

$E_6 =$

$E_7 =$

$E_8 =$

$E_9 =$ $P(E_9) =$

e) Suche selbst Ereignisse und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten.

3. In einer Urne liegen eine schwarze Kugel und zwei weiße Kugeln. Die weißen Kugeln tragen keine Nummern, sie sind nicht unterscheidbar.

a) Welche Kugelpaare können gezogen werden?

b) Schreibe die Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm.

c) Errechne die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

E_1: "Beide schwarz"

E_2: "Mindestens bei der ersten Ziehung schwarz"

E_3: "Keine Ziehung schwarz"

E_4: "Mindestens einmal schwarz"

d) Suche wieder selbst Ereignisse und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten.

e) Vergleiche das Baumdiagramm von Aufgabe 2 (Seite 24) mit obigem Baumdiagramm.
(Hilfe: Das Baumdiagramm von Aufgabe 3 hat bei den Zweigen, die zu den schwarzen Kugeln führen, die gleichen Wahrscheinlichkeiten wie das Baumdiagramm von Aufgabe 2.
Wie ist es aber mit den anderen Zweigen? Wurde hier vielleicht etwas zusammengeschoben und addiert?)

4. In einer Urne liegen 3 weiße und 2 schwarze Kugeln.
Unser Zufallsexperiment ist wieder eine zweimalige Ziehung wie in den Aufgaben 2 und 3.

a) Trage die Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.

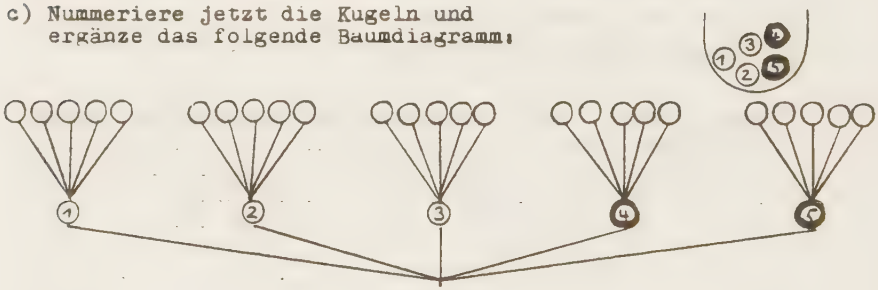
b) $E_1 = \{(○,○)\}$ $P(E_1) =$

$E_2 = \{(○,●)\}$

$E_3 = \{(●,○)\}$

$E_4 = \{(●,●)\}$

c) Nummeriere jetzt die Kugeln und ergänze das folgende Baumdiagramm:



d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1: "Beide weiß" $P(E_1) =$

E_2: "Erste weiß, zweite schwarz"

E_3: "Erste schwarz, zweite weiß"

E_4: "Beide schwarz"

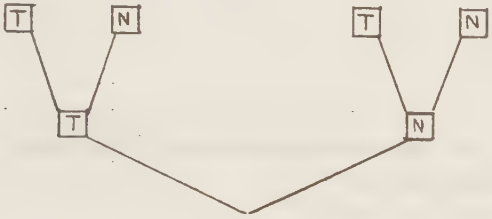
Vergleiche die Wahrscheinlichkeiten mit denen aus b)

5. Zufallsexperiment: Zweimaliger Würfelwurf

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß kein Wurf eine 6 ergibt?

In Aufgabe 4d) auf Seite 20 hast du die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis bereits ausgerechnet.

Rechne jetzt mit der Pfadregel, indem du die Ereignisse, in denen keine 6 vorkommt, mit N (= Niete) bezeichnest und den Rest mit T (= Treffer).



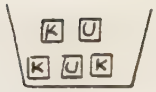
6. Zweimaliger Würfelwurf

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E : "Im ersten Wurf eine gerade Zahl, im zweiten Wurf eine 6" ?

Das Baumdiagramm zeigt dir den Weg. g steht für "gerade Zahl", u für "ungerade Zahl".

b) Überlege dir selbst drei Ereignisse und veranschauliche sie farbig im Baumdiagramm.

7. Aus der Urne wird ein Buchstabe zufällig gezogen, notiert und wieder zurückgelegt. Die Ziehung wird wiederholt.



a) Zeichne das Baumdiagramm und trage die Wahrscheinlichkeiten ein:

b) Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

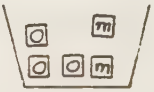
E_1 : "Beide Male K" $P(E_1) =$

E_2 : "Zuerst K, dann U"

E_3 : "Zuerst U, dann K"

E_4 : "Beide Male U"

8. Aus der Urne wird ein Buchstabe gezogen, notiert und zurückgelegt. Dann wird die Ziehung wiederholt.

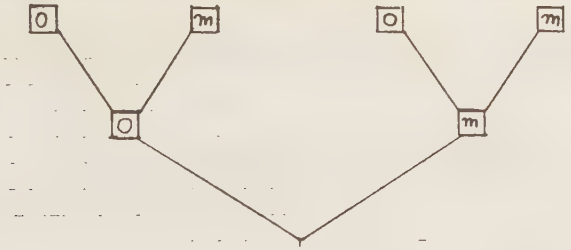


a) Zeichne das Baumdiagramm und trage die Wahrscheinlichkeiten ein:

b) Fülle die Tabelle aus:

E	{(o,o)}	{(o,m)}	{(m,o)}	{(m,m)}
P(E)				

9. Aus der Urne von Aufgabe 8 ziehen wir jetzt zwei Buchstaben ohne Zurücklegen hintereinander und notieren sie in der Reihenfolge ihrer Ziehung:



E	{(o,o)}	{(o,m)}	{(m,o)}	{(m,m)}
P(E)				

10. Ziehe aus der Urne von Aufgabe 7 ebenfalls zwei Buchstaben ohne Zurücklegen hintereinander und trage die Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein:

Literaturangaben zum Schülerskriptum

1) Barth/Bergold/Haller, Stochastik I 1980, S. 9

2) Vgl. Winter/Ziegler, Neue Mathematik 1972
3. Klasse, S. 128

3) Vgl. Andelfinger/Nestle, Mathematik M-6 1976, S. 141

4.4. Strukturanalyse der Unterrichtsstunde "Zwei besondere Würfel" (6. Klasse, Skriptum S.178)

4.4.1. Vorüberlegungen

Anthropogene Voraussetzungen:
Die entwicklungspsychologischen Voraussetzungen für diesen Inhalt habe ich in Abschnitt 2 diskutiert. Man kann guten Gewissens der Überzeugung sein, daß Schüler in diesem Alter aufnahmefähig für die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung sind.
In der Konstruktion des Teilcurriculum habe ich bedacht, daß vor dieser Unterrichtsstunde der Wahrscheinlichkeitsbegriff erarbeitet wurde und alle weiteren Lernvoraussetzungen entwickelt wurden.
Unmittelbare Voraussetzung für diese Stunde ist die Fähigkeit, bei einem vereinfachten Baumdiagramm zu erkennen, daß die Pfadenden keine Elementarereignisse darstellen müssen. Dieses Lernziel muß erreicht worden sein.
Sozial-kulturelle Voraussetzungen:
Bei dieser Stunde, die im Studio des Instituts für Unterrichtsmitschau aufgenommen werden soll, wird diese Schulklasse sich erfahrungsgemäß anders als sonst verhalten. Disziplinschwierigkeiten z.B. sind nicht zu erwarten. Allzugroße Gehemmtheit in diesem Alter aber auch nicht.
Intentionalität:
Die Qualitätsstufe des gesamten Teilcurriculum ist im Bereich der Anbahnung im Sinne der lerntheoretischen Didaktik angesiedelt. Die Lernzielintensitäten bewegen sich beinahe immer auf dieser Stufe, d.h. es sollen Kenntnisse und Fähigkeiten erworben werden.
Das Ziel der Entfaltung "rationalen Verhaltens in stochastischen Situationen", das ich als übergeordnetes Lernziel angeführt habe (Vgl. S. 81), wird dabei aber nicht aus dem Auge verloren, es bleibt ein intendiertes Verhalten, das im Laufe der Schuljahre gelernt werden soll.
Im Teilcurriculum findet sich explizit kein Ziel der emotionalen Dimension, was aber nicht heißen soll, daß der Mathematikunterricht auf diesem Gebiet keine Beiträge leistet.

In der geplanten Unterrichtsstunde habe ich z.B. vor, ein Spiel einzubauen, das für die Schüler höchstwahrscheinlich eine angenehme Abwechslung sein wird. Der Stochastikunterricht ganz allgemein in dieser Altersstufe bietet sehr häufig die Gelegenheit, Spiele zur Lernanbahnung einzusetzen und so die emotionale Dimension anzusprechen.
Schon bei diesem Stand der Vorüberlegungen zeigt es sich, wie sehr die einzelnen Strukturmomente ineinanderverwoben sind: Dadurch, daß ich die methodische Entscheidung gefällt habe, eine Spielsituation im Unterricht einzuplanen, habe ich auch gleichzeitig die Intentionalität mitberührt.

Thematik:
Die Schüler sollen in dieser Stunde die sog. Pfadregel lernen. Eine Begründung für diesen Inhalt vom mathematischen Standpunkt aus ist sehr leicht zu geben:
Die Beherrschung dieser Regel beinhaltet eine Annäherung an die fundamentale Idee der Modellbildung (0) und bahnt ein tieferes Verständnis für die Additionsregel(3) an. Gleichverteilung und Symmetrie (5) sind Bestandteil der Überlegungen der Schüler während des Spiels. Bei der Schätzung der Wahrscheinlichkeit nach dem Spiel werden die Schuler Aussagen zur 'Großen Zahl' (9) machen müssen.
In der beabsichtigten Weiterführung des Unterrichts nach dieser Stunde stellt die Kenntnis der Pfadregel eine Voraussetzung fur die Erarbeitung des Modells der Ziehung einer Kugel aus einer Urne ohne Zurücklegen (4) (7) dar.
(Die Ziffern in den Klammern bedeuten jeweils die fundamentalen Ideen aus Abschnitt 1, S. 18f)

Zur Erreichung des Lernziels: "Fähigkeit, die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen mit der Pfadregel zu berechnen" (Curriculum S. 145) habe ich in das Schülerskriptum ein Spiel mit zwei nicht alltäglichen Würfeln aufgenommen.
Die Problemstellung beinhaltet nun die Frage, welcher Würfel günstiger ist, wenn man die Spielregel "Die größere Zahl gewinnt" aufstellt. Die Schüler sollen zuerst im Spiel die Lösung des Problems finden und schließlich auch auf rechnerischem Wege.

Methodik:
Die Wahl des Spiels war letzten Endes bereits eine Methodenwahl. Sie impliziert induktives Vorgehen von der enaktiven Phase des Spiels über eine ikonische Phase, in der das Baumdiagramm eine wesentliche Rolle spielen wird zur symbolischen rechnerischen Lösung.
Die Sozialformen werden zwangsläufig öfters wechseln. Beim Spiel habe ich vor, die beiden Banknachbarn zusammenarbeiten zu lassen, bei der Erarbeitung der rechnerischen Lösung wird ein Klassengespräch sinnvoller sein und in der Übungsphase soll jeder Schüler allein rechnen.

Medienwahl:
Medien werden außer Sprache, Mimik und Gestik das Spielmaterial sein, nämlich für jede Bank zwei nicht alltägliche Würfel. Dann zwei große Demonstrationswürfel, Folien am Tageslichtprojektor, das Tafelbild und ein Arbeitsblatt.

Beabsichtigte Weiterführung:
Das Arbeitsblatt werde ich zum Zwecke der Lernzielkontrolle einsammeln und auswerten.
In den folgenden zwei Stunden habe ich vor, die Pfadregel am Urnenmodell anzuwenden, um schließlich die 'Ziehung ohne Zurücklegen' als nächsten Inhalt vorzubereiten.

4.4.2. Unterrichtsentwurf

Lernziele:

1. Fähigkeit, das Spiel mit zwei Würfeln gemäß der Regel "Die größere Zahl gewinnt" zu spielen.
2. Fähigkeit, die relativen Häufigkeiten von "Blau gewinnt" und "Grün gewinnt" aus der Wurftabelle aller Schüler zu berechnen.
3. Fähigkeit, aufgrund der Resultate der Versuche Aussagen über die zu erwartenden Gewinnwahrscheinlichkeiten beider Würfel zu machen.
4. Fähigkeit, das Baumdiagramm des zweistufigen Experiments zu zeichnen und die Wahrscheinlichkeiten einzutragen.
5. Fähigkeit, die Pfadregel selbst zu finden.
6. Fähigkeit, mit Hilfe der Pfadregel die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Würfel auszurechnen.

	Artikulation	Sozialformen	Medien	Zeit
1.	Problemstellung			
L	(Hat zwei große Modellwürfel in der Hand) Ich habe hier zwei ganz besondere Würfel. Auf euren Bänken findet ihr kleine Würfel mit denselben Zahlen. Schaut die Würfel einmal an und beschreibt sie schließlich.	Klasse	gr. Würfel kl. Würfel	
S	(Betrachten und beschreiben die Würfel)	Allein Klasse		
L	(Klappt die Tafel auf und zeigt die Würfelnetze an der Tafel) Hier seht ihr alle Flächen der Würfel und die aufgemalten Zahlen. Nehmen wir jetzt folgendes an: Nach der Regel "Die größere Zahl gewinnt" spielen zwei Kinder mit den beiden Würfeln. Welcher Würfel ist wohl der günstigere?		Tafel Würfelnetze	
S	(Überlegen) Äußern sich	Partner Klasse		

	Artikulation	Sozial-formen	Medien	Zeit
L	Wer ist für den blauen Würfel?			
S	(Melden sich)			
L	(Schreibt auf)		Tafel	
	Wer ist für den grünen?			
S	(Melden sich)			
L	(Zählt wieder ab und schreibt an die Tafel)			
	Das Ziel unserer Stunde ist es nun, zuerst im Experiment, das heißt durch Spielen, und dann auch rechnerisch dieses Problem zu lösen.			
	(Schreibt die Überschrift an die Tafel:"Grün gegen Blau"		Tafel	
2.	Problemlösung durch Spielen			5
L	Jetzt könnt ihr dann gleich das Spiel "Grün gegen Blau" 20mal spielen. Damit jeder von euch mit beiden Würfeln einmal spielen kann, wechselt ihn bitte nach 10 Spielen.			
	Die Tabelle auf dem Arbeitsblatt unter Nr. 1 ist für die Ergebnisse gedacht.		Arbeits-blatt	
	(Zeigt Tabelle auf Folie)		Projektor	
	Wir machen am besten einen Probeversuch.			
	(Wählt zwei Schüler aus)			
	Der Schüler mit dem grünen Würfel beginnt, denn das Spiel heißt ja "Grün gegen Blau".			
S	(Würfeln und nennen ihre Ergebnisse)			
L	(Trägt auf der Folie den entsprechenden Strich ein)			
	Der grüne (bzw. blaue) Würfel hat gewonnen, folg-			

	Artikulation	Sozial-formen	Medien	Zeit
	lich kommt hier ein Strich in die Liste. (zeigt auf der Folie) Am Ende eures Spiels muß also die Summe der Häufigkeiten 20 ergeben. Und jeder von euch trägt bitte auf dem Arbeitsblatt die Ergebnisse ein. Jetzt kann das Spiel beginnen, falls keine Fragen mehr offen sind.	Klasse		
S	(Spielen)	Partner	Würfel Arbeits-blatt	10
L	(Wenn alle fertig sind) Könnt ihr schon etwas zu dem Spiel sagen?			
S	(Äußern sich)	Klasse		
L	Wie gehen wir wohl jetzt vor, um noch genauere Werte zu bekommen? (Hilfe: Denke an unsere 3000 Versuche beim Würfeln)			
S	Schildern den bekannten Vorgang: Zusammenzählen aller Häufigkeiten und berechnen der relativen Häufigkeit)			
L	(Notiert auf der Folie die Häufigkeiten der Klasse)		Folie	
S	(Berechnen die relativen Häufigkeiten)			
L	Welcher Würfel war nun günstiger?			
S	(Nennen den grünen Würfel)			

	Artikulation	Sozial-formen	Medien	Zeit
L	Welchem gemeinen Bruch nähern sich diese beiden Dezimalbrüche?	Klasse		
S	(finden 1/3 und 2/3)			
L	Mit welcher Gewinnwahrscheinlichkeit kann man also rechnen?			
S	(Äußern sich)			

3. Problemlösung durch Rechnen — 30

3.1. Diagramme und Wahrscheinlichkeiten der beiden Würfel

L	Durch Experimentieren haben wir die relativen Häufigkeiten berechnet. Wir erwarten also, daß der grüne Würfel mit 2/3 Wahrscheinlichkeit gewinnt und der blaue mit 1/3. Ziel ist es nun, daß ihr diese Wahrscheinlichkeiten berechnet. Habt ihr Vorschläge? Besprecht euch zuerst.	Partner		
S	(Besprechen sich und äußern sich anschließend)	Klasse		
L	(Evtl.Hilfen: Baumdiagramme waren uns stets eine Hilfe; wie sieht das Diagramm für jeden Würfel aus?)			
S	(Finden die Diagramme)			
L	(Legt Folie auf) Welche Wahrscheinlichkeiten müssen wir eintragen?		Folie Projektor	

	Artikulation	Sozial-formen	Medien	Zeit
	(Hilfen: Wieviele Elemente hat die Ergebnismenge? Wieviele Elemente haben die Ereignisse "Eine 0 wird geworfen", "Eine 4 wird geworfen", Eine 1 wird geworfen" und "Eine 5 wird geworfen"?	Klasse		
S	(Nennen die Wahrscheinlichkeiten)			
L	(Legt Folie auf und trägt die von den Schülern genannten Werte ein) Tragt bitte diese Ergebnisse auf eurem Blatt unter Nr. 2 ein.		Folie	
S	(Schreiben)	Allein		

3.2. Diagramm und Wahrscheinlichkeit des zweistufigen Versuchs

L	Unser Spiel hieß "Grün gegen Blau". Den ersten Wurf müssen wir also mit dem Baum für den grünen Würfel veranschaulichen. (Legt die Folie des grünen Würfels auf) Wie sieht nun das Diagramm des zweistufigen Experiments "Grün gegen Blau" aus?	Klasse	Folie	35
S	(Äußern sich)	Gruppe Klasse		
L	(Legt Folie mit dem Diagramm auf) Welche Wahrscheinlichkeiten muß ich eintragen?			
S	(Nennen sie)			
L	Vervollständige auf dem Arbeitsblatt Nr. 3	Allein	Arbeits-blatt	

	Artikulation	Sozial-formen	Medien	Zeit
S	(Schreiben)	Allein		
L	(Schreibt an die Tafel: E_1: "Grün gewinnt" E_2: "Blau gewinnt") (Wenn alle fertig sind) Wann gewinnt der grüne Würfel?	Klasse	Tafel	
S	(Nennen die 3 Pfade; ein Schüler zeigt am Projektor)		Folie	
L	Der grüne Würfel hat also drei Gewinnpfade Un der blaue?			
S	(Schüler zeigt den einen Gewinnpfad des blauen Würfels am Projektor)		Folie	
L	Zeichne bitte auf dem Arbeitsblatt die Gewinn-pfade grün und blau ein.			
S	(Zeichnen)	Allein	Arbeits-blatt	
L	Wir erwarten also nach unserem Spiel, daß die Gewinnwahrscheinlichkeit für den blauen Würfel 1/3 beträgt. (Legt Folie auf) Ich habe hier das ausführliche Baumdiagramm. Welche und wieviele Paare genören zum Ereignis "Blau gewinnt"?	Klasse	Folie	40
S	(Zählen die Paare ab)			
L	(Schreibt an die Tafel: (1,4) 12-mal) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses "Blau gewinnt" kannst du jetzt leicht berechnen.		Tafel	

	Artikulation	Sozial-formen	Medien	Zeit
S	(Berechnen die Wahrscheinlichkeit)	Klasse		
L	(Schreibt an die Tafel) Und jetzt genauso die Wahrscheinlichkeiten der grünen Pfade. (Legt Folie auf)		Tafel Folie	
S	(Rechnen aus)			
L	(Schreibt an die Tafel: (1,0) 6-mal (5,0) 6-mal (5,4)12-mal) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von E_1?		Tafel	
S	(Nennen sie)			
L	(Notiert an der Tafel) Die drei Gewinnpfade haben also die Wahrscheinlichkeiten 6/36, 6/36 und 12/36. Wir können jetzt die Pfadwahrscheinlichkeiten in unser Diagramm schreiben. (Schreibt sie auf die Folie)		Folie	
S	(Sie nennen dem Lehrer die Zahlen)			
L	Haben wir richtig gezählt?			
S	(Wenden die Summenkontrolle an)			
L	Vervollständigt jetzt die Nr. 3 auf dem Arbeitsblatt			
S	(Schreiben)	Allein	Blatt	

3.3. Die Pfadregel

L	Betrachte jetzt nochmals die eingetragenen Wahrscheinlichkeiten.(Zeigt auf die Zweig- und Pfadwahrschein-	Klasse	Folie	50

Artikulation	Sozial-formen	Medien	Zeit
..lichkeiten) Seht ihr eine Möglichkeit, wie man aus diesem Diagramm gleich die ganzen Pfad-wahrscheinlichkeiten errechnen kann, ohne das ausführliche Diagramm zu benutzen? Besprecht euch einmal.			
S (Besprechen sich)	Partner		
L (Evtl.Hilfen: Zeigt auf die Brüche in den Zweigen und dann auf den Bruch am Ende des Pfads)			
S (Erkennen die Möglichkeit der Berechnung) Sie erläutern ihre Meinung vor der Klasse.	Klasse		
L (Schreibt die Produkte, die die Schüler diktieren, an die Tafel)		Tafel	
4. Zusammenfassung			
L Ihr habt jetzt die sog. Pfadregel angewendet. Wer erzählt denn jetzt noch einmal, wie wir zum Ergebnis gekommen sind?	Klasse	Tafel Folien	
S (Fassen zusammen)			
L (Legt die jeweiligen Folien auf bzw. zeigt auf die Tafelanschrift) Wer von euch hat denn nun richtig geraten?			
S (Antworten)			
L Tragt jetzt bitte den Rest auf dem Arbeits-blatt ein.		Arbeits-blatt	

	Artikulation	Sozial-formen	Medien	Zeit
S	(Schreiben)			

5. Übung

L	Bearbeite jetzt bitte die Nr. 5 auf dem Arbeitsblatt			60
S	(Arbeiten)	Allein	Arbeits-blatt	
L	(Geht herum und hilft evtl.)			

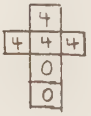
6. Lernzielkontrolle

Einsammeln des Arbeitsblattes und Korrektur

Tafelbild (Mitte)

Zwei besondere Würfel

Grün gegen Blau



E_1: "Grün gewinnt"

(1,0) 6-mal
(5,0) 6-mal
(5,4) 12-mal

E_2: "Blau gewinnt"

(1,4) 12-mal

$P(E_1) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

$P(E_2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Tafelbild (Seiten)

3 Gewinnpfade:

$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} =$

$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} =$

$= \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

1 Gewinnpfad

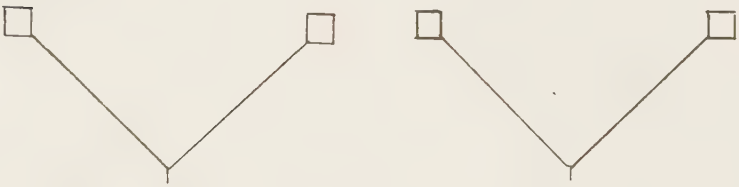
$\frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Arbeitsblatt

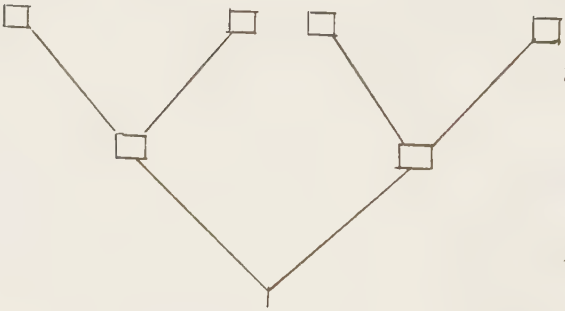
1.

"Grun gewinnt"	
"Blau gewinnt"	
	20

2.



3.



4. Gewinnpfad des blauen Würfels:

Gewinnpfad des grünen Würfels:

5. Jetzt heißt das Spiel "Blau gegen Grün"

a) Skizziere ein Baumdiagramm und schreibe die Wahrscheinlichkeiten hinein.
b) Rechne die Gewinnwahrscheinlichkeiten des blauen und des grünen Würfels aus.
c) Was fällt auf?

5. Planung der Erprobung des Teilcurriculums

Ich werde die Erprobung in je einer 5. und 6. Klasse eines Münchner Gymnasiums und einer Hauptschule im Würmtal selbst vornehmen.
Für eine weitere Erprobung in einer 5. und 6. Klasse (im folgenden stets mit "G,2" bezeichnet) hat sich freundlicherweise der Mathematiklehrer eines Gymnasiums am Stadtrand von München bereiterklärt.
Die Schüler der 6. Klassen dieser Erprobung haben im Jahr vorher noch nicht Stochastikunterricht gehabt, sodaß hier viele Begriffe erarbeitet werden müssen, die sonst nur kurz wiederholt würden. Der Abschnitt 2.2. des Curriculums, "Zufallsexperimente und ihre Ergebnismengen" erübrigt sich später.

Die Ergebnisse der Lernzielkontrolle werden wegen des geringen Stichprobenumfangs nicht generalisierbar sein. Diese Erprobung kann aber als Voruntersuchung innerhalb eines größeren, politisch legitimierten Versuchs aufgefaßt werden und die anschließende Auswertung als erste formative Evaluation.

In beiden Klassen kann erst im zweiten Halbjahr mit dem Unterricht begonnen werden. In den 5. Klassen wegen der Probezeit im Gymnasium, in den 6. Klassen, weil das Bruchrechnen vorher nicht vorausgesetzt werden kann.

5.1. Zu den beiden Schularten: Gymnasium und Hauptschule

Die Inhalte der beiden Schularten sind in der 5. und 6. Klasse in Bayern im wesentlichen die gleichen (vgl. S. 77), während sich der Intensitätsgrad der Lernziele und die Zeiteinplanung zum Teil erheblich unterscheiden.
Bei der Konstruktion des Teilcurriculum habe ich die Lernzielintensitäten für die unterste Niveaustufe zugrundegelegt. Eine endgültige Differenzierung in B-, A- und G-Niveau wird man m.E. auch nach dieser Erprobung noch aufschieben

müssen und vorher weitere Klassen unterrichten und testen müssen. Zur Zeiteinplanung werden sich wahrscheinlich eher einige Anhaltspunkte ergeben, um eine Empfehlung in dieser Richtung abgeben zu können.
Ich führe daher denselben Vor- und Nachtest mit denselben Beurteilungskriterien in beiden Schularten durch, setze aber die abschließende Lernzielkontrolle erst an, wenn ich den Eindruck gewonnen habe, daß ein akzeptables Resultat erzielt werden kann.
Während des Unterrichts wird darauf zu achten sein, daß weder unterfordert noch überfordert wird.
Die Einführungsphasen können m.E. gleich geplant werden; denn auch Schüler des Gymnasiums werden in dieser Altersstufe auf induktivem Weg über Selbsttätigkeit und Veranschaulichung am erfolgreichsten zur Abstraktion geführt.
Die Übungs- und Wiederholungsphasen aber werden aller Voraussicht nach in der Hauptschule länger sein müssen bzw. in kürzeren Abständen einzuplanen sein.

5.2. Empirische Forschungsmethoden

5.2.1. Vor- und Nachtest

Vor- und Nachtest sind in jeder Jahrgangsstufe identisch.
In der ersten und letzten Stunde der Erprobung soll die Bearbeitung stattfinden. Die Differenz der erreichten Punktzahl von Vor- und Nachtest gibt den Lernzuwachs an.
Der Test ist wie eine übliche Schulaufgabe konzipiert und im Umfang so gehalten, daß er in 45 Minuten bearbeitet werden kann.
Die Tatsache, daß die Schüler im Vortest wenige Items werden bearbeiten können, dürfte m.E. kein besonderes Problem aufwerfen, wenn man ihnen erklärt, daß mit Vor- und Nachtest gemessen werden soll, wieviel sie im Unterricht gelernt haben.

5.2.1.1. 5. Jahrgangsstufe

Der Test für die 5. Jahrgangsstufe besteht aus 15 Items. Aus den drei Abschnitten des Curriculums - Häufigkeiten, einstufige und mehrstufige Zufallsexperimente und Abzählen - wurde ein Querschnitt zusammengestellt, der erfahrungsgemäß in 45 Minuten bewältigt werden kann. Die Verteilung der Punkte wurde entsprechend dem Schwierigkeitsgrad der Aufgaben vorgenommen.

Lernziele und Punktverteilung

Item	Lernziel	Punkte
1a	Fähigkeit, aus einer Urliste die Häufigkeiten der Merkmalsausprägung "Beginn des Mietverhältnisses vor 1945" und "nach 1945" in einer Strichliste und in einem Blockdiagramm darzustellen.	2
1b	Strichliste und Blockdiagramm: Merkmal: Alter Merkmalsausprägung: "unter 20", "zwischen 20 und 40", "über 40"	2
1c	Strichliste und Blockdiagramm: Merkmal: Tätigkeit Merkmalsausprägung: "Student/Schüler, "berufstätig", "Rentner".	2
2	Fähigkeit, drei Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen.	1
3	Fähigkeit, sechs Glücksräder nach ihrer Gewinnchance zu ordnen.	1
4	Fähigkeit, fünf Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen.	1
5a	Fähigkeit, die fehlenden Ergebnisse in das Baumdiagramm des dreifachen Münzwurfs einzutragen und die Ergebnismenge zu notieren.	9

5b	Fähigkeit, zwei Ereignisse des dreimaligen Münzwurfs nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen.	1
6a	Fähigkeit des Notierens der Ergebnismenge des zweifachen Würfelwurfs mit Hilfe des Baumdiagramms.	1
6b	Fähigkeit, drei Ereignisse des zweifachen Würfelwurfs nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen.	1
7	Fähigkeit, mit Hilfe eines Baumdiagramms alle Verkleidungsmöglichkeiten anzugeben.	2
8a	Fähigkeit, alle Dreiertürme aus zwei Farben zu zeichnen.	8
8b	Fähigkeit, das Baumdiagramm dazu zu zeichnen	1
9a	Fähigkeit, alle Zweiertürme aus drei Farben zu zeichnen, ohne daß in einem Turm eine Farbe doppelt vorkommt.	6
9b	Fähigkeit, das Baumdiagramm dazu zu zeichnen.	1
		39

Item 10 wird gesondert ausgewertet. Diese Aufgabe soll zeigen, ob durch den Lehrgang bereits eine Korrektur im Hinblick auf "rationales Verhalten in stochastischen Situationen" erzielt werden konnte.
Item 10 zielt auf den fundamentalen Fehler "Fälschliche Aberkennung der Gleichwahrscheinlichkeit" bzw. "Fälschliche Aberkennung der Unabhängigkeit von Zufallsexperimenten". (Vgl. S. 23)

Auf den nächsten 5 Seiten folgen die Texte der Testaufgaben, wie sie den Schülern zur Bearbeitung vorgelegt werden.

1.
In dem Haus Gärtnerstraße 12 wohnen im Februar 1980 folgende Mieter:

Nr.	Name	Geburtsdatum	Beruf	Beginn des Mietverhältnisses
1.	A. Hans	3.12.28	Angest.	1955
2.	A. Beate	8. 9.30	Hausfrau	1955
3.	A. Susanne	12. 4.55	Sekretärin	1955
4.	A. Karl	8. 4.58	Student	1955
5.	D. Irma	4. 4.20	Hausfrau	1948
6.	F. Rudolf	5. 1.38	Ingenieur	1968
7.	F. Paula	7.12.42	Verkäuferin	1968
8.	F. Thomas	3.10.68	Schuler	1968
9.	P. Friedrich	6.11.15	Rentner	1942
10.	P. Charlotte	19. 1.20	Hausfrau	1942
11.	T. Kurt	11. 2.40	Redakteur	1979
12.	T. Helga	3. 8.42	Angestellte	1979
13.	T. Peter	9. 5.64	Schüler	1979
14.	T. Brigitte	28.11.66	Schülerin	1979
15.	T. Thomas	17.11.70	Schüler	1979

Erstelle zu obiger Urliste jeweils eine Strichliste und ein Blockdiagramm im Hinblick auf folgende Merkmale:

a.
Merkmal "Beginn des Mietverhältnisses"
Merkmalsausprägung "vor 1945", "nach 1945"

b.
Merkmal "Alter"
Merkmalsausprägung "unter 20", "zwischen 20 und 40", "über 40"

c.
Merkmal "Tätigkeit"
Merkmalsausprägung: "Schüler/Student","berufstätig", "Rentner"

2.
Du greifst mit geschlossenen Augen in eine Schachtel, in der alle Merkmalsplättchen liegen, mit denen du in der Grundschule im Mathematikunterricht gearbeitet hast.
Was ist deiner Ansicht nach wahrscheinlicher:
Das Plättchen, das du greifst

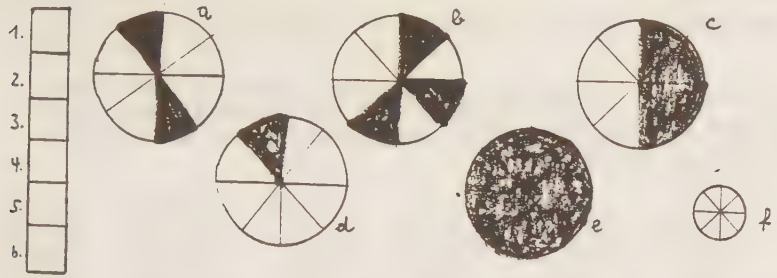
a. ist blau,

b. ist blau, dreieckig und groß,

c. ist blau und groß?

Schreibe die Buchstaben a,b und c in die richtigen Kästchen:

3.
"Weiß" gewinnt.
In welcher Reihenfolge mußt du die Buchstaben in die Kästchen schreiben?



4.
In einer Urne liegen 100 Kärtchen. Auf jedem Kärtchen steht eine Zahl von 1 bis 100. Keine Zahl wurde ausgelassen.
Es wird ein Kärtchen blind gezogen.
Was ist wahrscheinlicher: Auf dem gezogenen Kärtchen steht

A: eine Zahl, die durch 10 teilbar ist,

B: eine Zahl, die durch 2 teilbar ist,

C: eine Zahl, die durch 7 teilbar ist,

D: eine Zahl größer als 50 und kleiner als 70,

E: eine Zahl kleiner als 30 ?

Schreibe die Buchstaben in der Reihenfolge der Gewinnschancen in die Kästchen:

1. ☐ 2. ☐ 3. ☐ 4. ☐ 5. ☐

5.
Das Baumdiagramm veranschaulicht ein dreistufiges Zufallsexperiment mit einer Münze.

a.
Fülle die leeren Kreise aus und schreibe darunter die Ergebnismenge des Zufallsexperiments:

G = { }

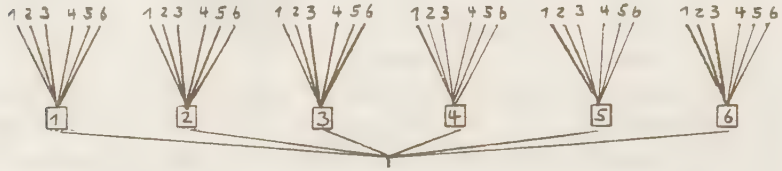
b.
Was ist wahrscheinlicher:

A: 2-mal Zahl ,

B: 3-mal Zahl ?

6.

a. Schreibe die Ergebnismenge des Zufallsexperiments "Zweimaliges Werfen eines Wurfels" in die Mengenklammern. Das Baumdiagramm soll dir beim Suchen aller möglichen Ergebnisse helfen:



G = {(1,1); (1,2);

; (6,6)}

b. Was ist wahrscheinlicher:

A: Die Augensumme ist größer als 4 und kleiner al 9,

B: Die Augensumme ist 12,

C: Die Augensumme ist kleiner als 4 ?

Schreibe die Buchstaben A, B und C in entsprechender Reihenfolge in die Kästchen:

1. 2. 3.

7.
Brigitte sucht alte Kleidungsstücke, um sich zu verkleiden. Sie findet auf dem Speicher ihrer Oma drei Röcke, (rot, grun, blau), zwei Blusen (weiß, rosa) und drei Kopftücher (braun, schwarz, hellblau).
Auf wieviele verschiedene Arten kann sie sich verkleiden?
Zeichne auch ein Baumdiagramm.

8.
a. Zeichne alle möglichen Türme aus drei Legosteinen in den Farben:rot und blau.

b. Zeichne das Baumdiagramm:

9.

a. Zeichne alle Türme aus zwei Legosteinen in den Farben rot, grün, blau so, daß in keinem Turm eine Farbe mehrmals vorkommt.

b. Zeichne das Baumdiagramm:

10.

Wie würdest du beim Lottospielen vorgehen:

A: Die Zahlen 1 bis 6 ankreuzen?

B: Nur gerade Zahlen ankreuzen?

C: Eine gut gemischte Auswahl treffen?

D: Oder bist du der Meinung, daß es egal ist, was angekreuzt wird?

5.2.1.2. 6. Jahrgangsstufe

Der Test für die 6. Klasse besteht aus 23 Items. Auch hier wurde ein Querschnitt des Lehrgangs zusammengestellt, der in 45 Minuten zu bearbeiten ist.

Lernziele und Punktverteilung

Item	Lernziel	Punkte
1a	Fähigkeit, relative Häufigkeiten zu berechnen.	3
1b	Fähigkeit, relative Häufigkeiten zu ordnen.	1
2	Fähigkeit, Schnittmengen zu bilden und elementefremde Mengen zu bestimmen.	4
3	Fähigkeit, drei Ereignisse zum Zufallsexperiment des einmaligen Würfelwurfs zu nennen.	3
4a	Wissen, daß die relative Häufigkeit des sicheren Ereignisses 1 ist.	1
4b	Wissen, daß die relative Häufigkeit des unmöglichen Ereignisses 0 ist.	1
5a	Fähigkeit des Berechnens der Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse des Zufallsexperiments des einmaligen Würfelwurfs 'mindestens 4 Augen'	1
5b	'höchstens 2 Augen'	1
5c	'einer ungeraden Zahl, aber keiner 3	1
5d	'einer ungeraden Zahl, aber keiner Primzahl'	1
6a	Fähigkeit des Berechnens der Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse des Zufallsexperiments des zweimaligen Würfelwurfs 'gleiche Augenzahlen'	1
6b	'Augensumme ist 12'	1
6c	'Augensumme ist 13'	1

6d	'kein Wurf ist eine 1'	1
6e	'die Augensumme ist durch 4 teilbar'	1
6f	'die Augensumme ist kleiner als 6 oder größer als 10'	1
7	Kenntnis der Additivität von Elementarereignissen und Fähigkeit, eine entsprechende Textaufgabe zu lösen.	1
8a	Urnenmodell mit Zurücklegen: Fähigkeit, das zugehörige Baumdiagramm zu zeichnen und die Wahrscheinlichkeiten in die Zweige und an den Pfaden einzutragen.	11
8b	Fähigkeit, die Wahrscheinlichkeit von drei Ereignissen zu berechnen.	3
8c	Fähigkeit, die Kugeln entsprechend zu nummerieren, ein ausführliches Baumdiagramm zu zeichnen und die Wahrscheinlichkeiten in das Diagramm zu schreiben.	3
8d	Fähigkeit, die Ergebnismenge zu notieren.	2
9a	Urnenmodell ohne Zurücklegen: Fähigkeit, das zugehörige Baumdiagramm zu zeichnen.	1
9b	Fähigkeit, die Wahrscheinlichkeiten in das Diagramm zu schreiben.	10
		54

Auf den nächsten 3 Seiten folgen die Texte der Testaufgaben, wie sie den Schülern zur Bearbeitung vorgelegt werden.

1.
Drei sechste Klassen einer Rosenheimer Schule haben einen Fragebogen ausgefüllt.
Eine der Fragen lautete: Bis du Fahrschüler oder kannst du zu Fuß zur Schule gehen?
Die Frage wurde wie folgt beantwortet:

Klasse 6a (35 Schüler): 7 Fahrschüler
Klasse 6b (37 Schüler): 8 Fahrschüler
Klasse 6c (36 Schüler): 9 Fahrschüler.

a.
Berechne die relative Häufigkeit der Fahrschüler in jeder Klasse.

b.
In welcher Klasse ist der Anteil der Fahrschüler am höchsten?

2.
$A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,4,6\}$ $C = \{4,6,8\}$

$A \cap B =$
$A \cap C =$
$B \cap C =$

Welche Mengen sind elementefremd?

3.
Nenne drei Ereignisse, die beim einmaligen Würfeln als Gewinnregel aufgestellt werden könnten:

4.
a. Wie groß ist die relative Häufigkeit des sicheren Ereignisses?

b. Wie groß ist die relative Häufigkeit des unmöglichen Ereignisses?

5.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Wurfeln einen Wurf zu erreichen von

a. mindestens 4 Augen ,

b. höchstens 2 Augen ,

c. einer ungeraden Zahl, aber keiner 3 ,

d. einer ungeraden Zahl, aber keiner Primzahl ?

6.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse beim zweimaligen Würfeln:

a. gleiche Augenzahlen,

b. Augensumme ist 12 ,

c. Augensumme ist 13 ,

d. kein Wurf ist eine 1 ,

e. die Augensumme ist durch 4 teilbar,

f. die Augensumme ist kleiner als 6 oder größer als 10 ?

7.
In einer Urne liegen weiße, rote und schwarze Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen beträgt $\frac{1}{4}$, eine rote zu ziehen $\frac{1}{5}$. Wieviele von den insgesamt 20 Kugeln mussen schwarz sein?

8.
In einer Urne befinden sich zwei rote und eine weiße Kugel. Es wird eine Kugel gezogen, das Ergeonis notiert, die Kugel zurückgelegt, gemischt und nochmals gezogen und das Ergebnis notiert.

a. Zeichne ein Baumdiagramm und schreibe die Wahrscheinlichkeiten in das Diagramm.

b. Errechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_1 : "Zweimal rot" $P(E_1) =$

E_2 : "Erste Ziehung rot"

E_3 : "Keine Ziehung weiß"

c. Nummeriere jetzt die beiden roten Kugeln mit 1 und 2, sodaß sie unterscheidbar sind.
Zeichne ein Baumdiagramm und schreibe die Wahrscheinlichkeiten in das Diagramm.

d. Zeichne die Ergebnismenge mit Hilfe des Baumdiagramms von Aufgabe c.

9.
In einer Urne liegen drei blaue und zwei gelbe Kugeln.
Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen hintereinander gezogen und in der Reihenfolge ihrer Ziehung notiert.

a. Zeichne ein Baumdiagramm

b. Schreibe die Wahrscheinlichkeiten in das Diagramm.

10. Wie würdest du beim Lottospielen vorgehen:

A: Die Zahlen 1 bis 6 ankreuzen?

B: Nur gerade Zahlen ankreuzen?

C: Eine gut gemischte Auswahl ankreuzen?

D: Oder bist du der Meinung, daß es egal ist, was angekreuzt wird?

5.2.2. Schülerbeobachtung
Frageoogen
Dokumentation des Unterrichts

Schülerbeobachtung:

In dem von mir durchgeführten Unterricht werden in jeder Klasse zwei Schüler - einer mit guter und einer mit schlechter Mathematiknote - beobachtet.

Die Auswahl sollen die jeweiligen Mathematiklehrer treffen.
Die Beobachtung kann Aufschluß darüber geben, wie weit sowohl der gute als auch der schlechte Mathematikschüler dem Unterricht folgt, wie er mitarbeitet und wie sein Hausaufgabenverhalten ist.

In jeder Stunde wird ein Beobachtungsbogen (S. 217) von dem jeweiligen Beobachter (dem Mathematiklehrer bzw. einem Studenten) ausgefüllt.

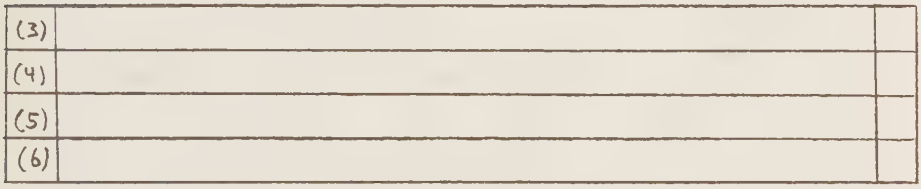
Die Beobachtungskriterien sind folgende:

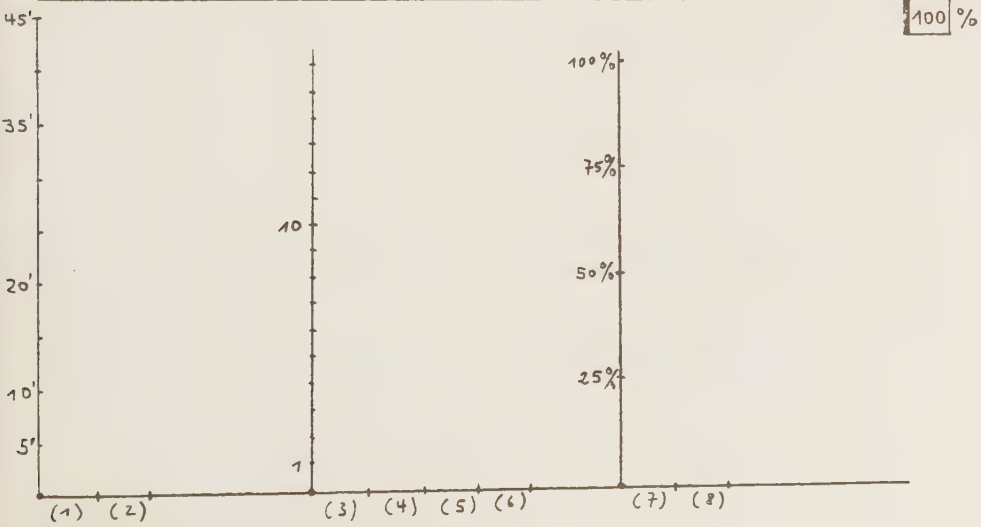
(1) Arbeitet nach Anweisung
(2) Beschäftigt sich anderweitig
(3) Stellt weiterführende Fragen
(4) Stellt Verständnisfragen
(5) Antwortet richtig
(6) Antwortet falsch
(7) Hausaufgabe richtig
(8) Hausaufgabe falsch.

Am Ende des Lehrgangs wird dann ein Verlaufsdiagramm für jede Kategorie bezüglich der gehaltenen Unterrichtsstunden erstellt, um das Verhaltensprofil beurteilen zu können.

Stunde Klasse: Datum:

(1) Arbeitet nach Anweisung
(2) Beschäftigt sich anderweitig
(3) Stellt weiterführende Fragen
(4) Stellt Verständnisfragen
(5) Antwortet richtig
(6) Antwortet falsch
(7) Hausaufgabe richtig
(8) Hausaufgabe falsch





Frageboogen:

Den Frageboogen (S.219) sollen die Schüler am Ende des Lehrgangs ausfüllen.
Die Auswertung der Antworten wird für die Evaluation der Erprobung u.U. von Nutzen sein.

Dokumentation des Unterrichts:

Der von mir durchgeführte Unterricht wird auf Tonband aufgenommen und anschließend in einer Maschinenschrift-Transkription dokumentiert.
Die Unterrichtsstunde "Zwei besondere Würfel" kann im Studio des Instituts für Unterrichtsmitschau München mit den beiden 6. Klassen auf Videokassette aufgenommen werden.
So ist eine hohe Transparenz der Erprobung gewährleistet.

Die Feinlernziele werden jedem Stundentranskript vorangestellt.
Nach jeder Unterrichtsstunde folgt eine kurze Nachbetrachtung bzw. es werden Vorüberlegungen für die nächste Stunde vermerkt.

1. Wie hat Dir dieses Gebiet der Mathematik gefallen?

gar nicht	etwas	mittel	gut	sehr gut

2. Wie ordnest Du diesen Teil des Mathematikunterrichts ein:

sehr leicht	leicht	mittel	schwer	sehr schwer

3. Möchtest Du in den folgenden Schuljahren noch mehr auf diesem Gebiet lernen?

ja	nein

4. Warum?

6. Evaluation der Erprobung des Teilcurriculums

Im folgenden bespreche ich die Ergebnisse von Vor- und Nachtest, Beobachtung und Fragebogen der an der Erprobung beteiligten Klassen. Die Daten sind in Tabellen geordnet und neben der Dokumentation des Unterrichts im Anhang dieser Arbeit zu finden.

Ich werde zuerst auf die Daten in den einzelnen Klassen eingehen und im Anschluß daran die Ergebnisse der drei fünften Klassen und die der drei sechsten Klassen vergleichen und bemerkenswerte Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten herausstellen.
Meine Schlußfolgerungen in Abschnitt 7 können lediglich als formative Evaluation verstanden werden, was ich auch bereits mehrfach in dieser Arbeit betont habe. In die Planung einer großen Versuchsreihe sollen diese Vorerfahrungen dann miteinbezogen werden.

Alle Werte sind Mittelwerte in Punkten bzw. Prozenten angegeben.
Bei der Einzelitem-Analyse des Vortests interessieren vor allem die besonders weitgehend bearbeiteten Items. Im Nachtest müssen diejenigen Items zu Konsequenzen für weitere Planungen führen, bei denen sowohl die Ergebnisse im Vortest als auch der Lernzuwachs niedrig sind.

Die beiden Klassen des zweiten Gymnasiums (G,2) haben keinen Vortest bearbeitet. Hier kann also nur die Punktzahl im Nachtest zugrundegelegt werden. Deshalb werde ich zum Vergleich der Jahrgangsstufen lediglich den Nachtest und die Anzahl der Unterrichtsstunden heranziehen.

Item 10 wird gesondert betrachtet (vgl. auch S. 205), wobei hier bei den vier Klassen mit Vortest interessant sein wird, ob sich im Nachtest eine Verschiebung zugunsten 'D' (vgl. den Text von Item 10, S. 210) ergeben hat.

6.1. 5. Klasse Gymnasium (5/G)

Diese Klasse besteht aus 24 Schülern mit 9 Mädchen und 14 Jungen. Ausgewertet werden die Ergebnisse von 23 Schülern, da ein Schülern beim Nachtest fehlte.
Erste Fremdsprache ist in dieser Klasse Latein.
Der Klassendurchschnitt der Mathematiknoten im ersten Halbjahr betrug 2,71. Nach Auskunft der Mathematiklehrerin wird sich der Jahresdurchschnitt verschlechtern.

Die Erprobung erstreckte sich über den Zeitraum vom 19.6. bis 11.7.1980. Einschließlich Vor- und Nachtest, für die je eine Unterrichtsstunde von 45 Minuten veranschlagt war, wurde 10 Stunden Stochastik in den regulären Mathematikstunden unterrichtet.
Die Schüler wußten, daß das Ergebnis des Tests für die Mathematiknote keine Konsequenzen haben würde, sie waren sich aber auch im klaren darüber, daß gute Mitarbeit und gutes Hausaufgabenverhalten wie üblich gefordert werden.

6.1.1. Vor- und Nachtest

Vortest (Tabellen 4,5,15; Texte der Aufgaben S. 206-210)

Der Vortest wurde von der Mathematiklehrerin beaufsichtigt. Sie erzählte den Schülern auf meine Bitte hin, daß sie so viel wie möglich bearbeiten sollten, den unbekannten Rest würden sie in den folgenden Stunden lernen.
Die meisten Schüler haben sich daraufhin sehr konzentriert und lange geknobelt. Daher das Durchschnittsergebnis von 23% (Tabelle 1).

Bei 6 Items waren keinerlei Vorkenntnisse vorhanden. (Item 1a, 1b, 1c, 5a, 8b, 9b; Tabelle 4 und 5)

Aufgabe 3 "Fähigkeit, 6 Glücksräder nach ihren Gewinnchancen zu ordnen" wurde in dieser Klasse dagegen zu 78% richtig gelöst.
Item 9a und 8a "Fähigkeit, alle Zweiertürme aus drei Farben

zu zeichnen, ohne daß in einem Turm eine Farbe doppelt vorkommt" und "Fähigkeit, alle Dreiertürme aus zwei Farben zu zeichnen" wurden auch noch erstaunlich weitgehend bearbeitet mit 59% bzw. 46% (vgl. Tabelle 5).
Die Resultate dieser drei Items sind sicher darauf zurückzuführen, daß die Mathematiklehrerin die Schüler ermahnt hatte, sich möglichst anzustrengen und daß diese Aufgaben bis zu einem gewissen Grad auf unsystematische, intuitive Weise gelöst werden können. Das gleiche gilt für die restlichen Items.
Tabelle 15 veranschaulicht die Verteilung in einem Histogramm, wobei die dunklen Blöcke die Ergebnisse des Vortests veranschaulichen.

Nachtest

Im Nachtest - nach 6 Stunden Unterricht - erreichten die Schüler dieser Klasse im Durchschnitt 74% der Punkte.
Der Lernzuwachs beträgt also 51% (Tabelle 1).

Bei der Auflistung der Einzelitems (Tabelle 4 und 5) liegt Item 4 "Fähigkeit, 5 Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen" (Modell: Urne mit allen Zahlenkärtchen von 1 bis 100) mit 48% als einziges unter der 50%-Marke. Der Lernzuwachs beträgt aber doch 35%.

Item 6a "Fähigkeit, alle Dreiertürme aus zwei Farben zu zeichnen" folgt mit genau 50% und Item 6b "Fähigkeit, das Baumdiagramm dazu zu zeichnen" mit 52%.
Bei Item 6a ist ein Lernzuwachs von nur 4% zu verzeichnen, was deutlich zeigt, daß im Unterricht mehr Gewicht auf Bauen und Zeichnen hätte gelegt werden müssen; daß wahrscheinlich zu schnell abstrahiert wurde. (Vgl. 6. Stunde der Dokumentation) Vor dem Test hätte man besser noch eine Übungsstunde eingeschoben.
Der Lernzuwachs von Item 6b ist dagegen mit 52% zufriedenstellend.
Alle anderen Items liegen viel höher und geben in dieser Klasse keinen Anlaß zu Änderungsüberlegungen.

Ganz klar bevorzugt angekreuzt wird in dieser Klasse sowohl im Vor- als auch im Nachtest bei Item 10 die Frage C. (Tabelle 1 und 10; Text von Item 10 S. 210)
Im Nachtest entscheiden sich 13% der Schüler nicht mehr für C, aber sie wählen dafür nicht alle D, sondern auch A und B. D gewinnt nur 5%.
Man kann also sagen, daß der kurze Lehrgang kein wesentlich anderes Verhältnis zu dieser Fragestellung bewirkt hat. (In dem von mir gehaltenen Unterricht wurde zwischen Vor- und Nachtest an keiner Stelle auf dieses Item eingegangen.)

6.1.2. Beobachtung

Der Beobachtungsbogen wurde jede Stunde von der Mathematiklehrerin ausgefüllt. Gelegentlich konnte ich die Schüler besser sehen bzw. ich habe mit ihnen während einer Stillarbeit leise gesprochen. In diesen Fällen habe ich meine Beobachtungen auch auf dem Bogen vermerkt. (Das gilt auch für die anderen Klassen)

Der gute Mathematikschüler (+) (Tabelle 16 und 17)

Der von der Mathematiklehrerin vorgeschlagene gute Mathematikschüler (Note 2) ist der 21. Schüler in Tabelle 13. Er erreichte im Vortest 16%, im Nachtest 72%. (Das beste Ergeonis erzielte in dieser Klasse der 10. Schüler mit 97%) Bei der Frage 10 entschied er sich beide Male für C.

In Tabelle 16 und 17 sind die Beobachtungsdaten aller Unterrichtsstunden (ohne Vor- und Nachtest) für diesen Schüler zusammengestellt.
Gegen Ende des Lehrgangs nimmt die Aufmerksamkeit bei ihm ab. (Vgl. die Beobachtungskategorien S. 217)
Er beschäftigt sich in der 8. und 9. Stunde mehr als die Hälfte der Zeit anderweitig. (Diagramm (1)), und er antwortet öfters falsch als vorher. (Diagramm (6)). Seine Hausaufgaben sind aber durchwegs gemacht und auch ganz richtig (Diagramm (7)). Im Nachtest schnitt er nicht so

gut ab, wie man das - entsprechend seinen sonstigen Leistungen - hätte erwarten können.
Aufschlußreich sind seine Frageboogendaten. (Tabelle 20)
Er möchte nicht mehr in den nächsten Jahren lernen: "Weil ich es langweilig finde". Die Mathematiklehrerin kann sich vorstellen, daß er unterfordert wurde und deshalb sein Interesse nachließ.

Der schlechte Mathematikschüler (-) (Tabelle 18 und 19)

Der ausgewählte schlechte Mathematikschüler (Note 4) ist der 18. Schüler in Tabelle 13.
Er erreichte im Vortest 8%, im Nachtest 59%. (Die schlechteste Leistung im Nachtest betrug 33% in dieser Klasse)
Bei Frage 10 entschied er sich im Vortest für B (d.h. 'nur gerade Zahlen ankreuzen'), im Nachtest für C.

In Tabelle 18 und 19 sind seine Beobachtungsdaten zusammengestellt.
Seine Aufmerksamkeit schwankte erheblich. In der 6. Stunde war er besonders unaufmerksam (Diagramm (1)), sodaß ich ihn ermahnt habe. Daraufhin hat er sich in der 9. Stunde wieder mehr angestrengt und vor allem fünfmal richtig geantwortet (Diagramm (5)).
Seine Hausaufgaben hat er immer gemacht; einmal nur zur Hälfte richtig. (Diagramm (7))
Laut Fragebogen (Tabelle 20) hat ihm der neue Inhalt 'etwas' gefallen, er fand ihn 'sehr leicht' und er möchte mehr davon lernen: "Weils das bringt".
Ihn hat der neue Stoff motiviert und ermutigt und seine Leistungen liegen hier über denen im übrigen Mathematikunterricht.

6.1.3. Fragebogen (Text S. 219)

Die Frage, wie ihnen dieses Gebiet der Mathematik gefallen hat, beantworten 39% der Schüler mit 'gut' und 26% sogar mit 'sehr gut'. Für 'mittel' entscheiden sich 9%, für 'etwas' 13% und für 'gar nicht' ebenfalls 13%. (Tabelle 11)

Nach dem Schwierigkeitsgrad gefragt, antworten 26% der Schüler, daß sie den Lehrgang sehr leicht fanden, 61% kreuzen 'leicht' an und 13% 'mittel'. Als 'schwer bzw. 'sehr schwer' stuft ihn kein Schüler dieser Klasse ein.

Auf die Frage, ob sie in den folgenden Schuljahren noch mehr auf diesem Gebiet lernen möchten, antworten 78% mit 'ja'.
Auf die Frage 'Warum?' haben nur zwei Schüler nicht geantwortet. (Vgl. Tabelle 20 und 21)
Interessant finde ich, was der 7. Schüler (Vortest 5%, Nachtest 69%, Mathematiknote 2) schreibt: "Ja. Weil man bei diesen Sachen sich nicht so anstrengen muß und sozusagen mit diesen Sachen nur spielt. Mir macht es sehr viel Spaß; auf ein Ex würde ich mich vielleicht schon freuen. Mein Vater braucht diese Sachen für sein Geschäft."
Für diesen Schüler spielt allem Anschein nach die "Lebensdienlichkeit" eine wichtige Rolle.
Es finden sich aber auch Antworten wie diese: "Ja. Weil wir dann nicht so viel anderes in Mathematik lernen müssen." (6. Schüler) oder "Dann hört endlich die doofe Mengenlehre auf" (10.Schüler).

6.2. 5. Klasse Hauptschule (5/HS)

Diese Klasse besteht aus 13 Jungen und 16 Mädchen. Zwei Schüler fehlten beim Nachtest, sodaß nur die Ergebnisse von 27 Schülern ausgewertet werden. (Tabelle 22-25)

Der Klassendurchschnitt der Mathematiknoten im ersten Halbjahr betrug 3,10.

Die Erprobung erstreckte sich über den Zeitraum vom 18.4. bis 23.7.1980. Es wurden 15 Stunden unterrichtet (ohne Vor- und Nachtest). Der Unterricht fand in der "Verfügungsstunde" statt, also nicht im regulären Mathematikunterricht und mit wenigen Ausnahmen nur einmal in der Woche, sodaß in jeder Stunde eine relativ lange Wiederholphase an den

Anfang gestellt werden mußte.

Die Schüler wurden davon in Kenntnis gesetzt, daß die Ergebnisse des Tests nicht für die Mathematiknote herangezogen werden. Die Lehrerin dieser Klasse hatte aber auch klar zum Ausdruck gebracht, daß - wie in allen anderen Unterrichtsstunden - gute Mitarbeit erwartet wird und daß Hausaufgaben zu machen sein werden.

6.2.1. Vor- und Nachtest

Vortest

Der Vortest wurde von mir und der Klassenlehrerin beaufsichtigt. Ich erklärte den Schülern, daß sie nicht alle Aufgaben würden bearbeiten können, daß dieser Vortest aber als Ausgangspunkt für den folgenden Unterricht wichtig sei. Die Schüler bemühten sich daraufhin sehr und das Durchschnittsresultat ist wiederum ganz erstaunlich, nämlich 15% (Tabelle 1).

Die Items 1a, 1b, 1c, 5a, 8b und 9b konnten auch in dieser Klasse nicht bearbeitet werden und Item 3 wurde mit 59% (Tabelle 4) ebenfalls am besten gelöst. Dann folgt 6a mit 55%, 8a mit 35% und 9a mit 20%. (Tabelle 5)

Tabelle 26 veranschaulicht die Verteilung der Ergebnisse des Vortest (dunkle Säulen).

Die Übereinstimmung der zwei 5. Klassen in den nicht bearbeiteten Aufgaben wie auch in den gut bearbeiteten ist sicher darauf zurückzuführen, daß die Lehrpläne der beiden Schularten in den 5. Klassen (bis auf eine Ausnahme, vgl. hierzu S. 77) die gleichen Inhalte vorschreiben, d.h. daß die Vorkenntnisse in der Regel noch gleich sind.

Nachtest

Im Nachtest - nach 15 Stunden Unterricht, aber mit jeweils einer Woche Pause - erreichte diese Klasse 74%. Der Lernzuwachs beträgt 59%. (Tabelle 1)

Bei der Verteilung der Einzelitems fällt auf, daß Item 4 nur zu 26% richtig bearbeitet wurde und der Lernzuwachs nur 19% beträgt.
Item 1b und 1c folgen mit 41% und 46% (Tabelle 4) und Item 7 mit 50% (Tabelle 5), aber mit gutem Lernzuwachs von 41%, 46% und 46,5%.
Alle anderen Items liegen z.T. erheblich über 50%.

Eine ähnliche Aufgabe wie Item 4 wurde in der 6. Stunde, am 19.5.80, mit den Schülern durchgearbeitet.
Vor dem Test sollten die Schüler zwar wiederholen, aber anscheinend war es nach so langer Zeit (der Nachtest fand am 23.7.80 statt) für die meisten zu schwierig, nochmals Zugang zu dieser Aufgabe zu finden. Der beobachtete gute Schüler hat diese Aufgabe gelöst (Tabelle 22, Nr. 4), die beobachtete schlechte Schülerin nicht. (Tabelle 22, Nr. 18)

Bei Item 10 gibt es in dieser Klasse keine Verschiebung von C nach D. Im Gegenteil. Im Nachtest gehen 2,5% wieder weg von D und C wird um 22% öfters angekreuzt. (Tabelle 1 und 10) Der Unterricht in dieser Klasse hat sich auf Item 10 nicht positiv ausgewirkt.

6.2.2. Beobachtung

Der gute Mathematikschüler (+) (Tabelle 27 und 28)

Der von der Lehrerin vorgeschlagene gute Mathematikschüler ist der 4. Schüler in Tabelle 22. Er löste im Vortest 21%, im Nachtest 100% der Aufgaben richtig und erreichte damit mit noch einer Schülerin dieser Klasse die volle Punktzahl. Seine Mathematiknote ist 2; er wird nach dieser Klasse ins Gymnasium überwechseln.
Bei Item 10 entschied er sich beide Male für C (Tabelle 24)

Die Beobachtungsdaten sind in Tabelle 27 und 28 zusammengestellt.
Seine Aufmerksamkeit war durchwegs hoch. (Diagramm (1))

Am Anfang des Lehrgangs stellte er weiterführende Fragen (Diagramm (3)) und auch Verständnisfragen (Diagramm (4)). Diagramm (5) und (6) zeigen, daß er sehr rege mitgearbeitet hat. Dabei antwortete er immer wieder auch falsch, sehr viel häufiger aber richtig.
Bis auf einmal (13. Stunde), und das beruhte wohl auf einem Mißverständnis, hat er die Hausaufgaben immer gemacht. Für die 3. Stunde nur halb richtig, für die 5. Stunde falsch.

Im Fragebogen (Tabelle 31, Nr. 4) äußert er sich so: Der neue Inhalt hat ihm 'etwas' gefallen, den Schwierigkeitsgrad stuft er mit 'leicht' ein und er möchte nicht mehr in den folgenden Schuljahren lernen: "Wir verlieren die Verfügungsstunde; manchmal langweilig".

Die schlechte Mathematikschülerin (-) (Tabelle 29 und 30)

Diese Schülerin hat in Mathematik die Note 5. Sie erreichte im Vortest 5%, im Nachtest 30%. (Tabelle 22, Nr. 18)
Die schlechteste Leistung in dieser Klasse im Nachtest betrug 5%. Allerdings hätte diese Schülerin (Nr. 20) wohl nicht so schlecht abgeschnitten, wenn sie nicht in der Pause hingefallen wäre und sich die ganze Stunde über ihre schmutzige Hose geärgert hätte.
Die beobachtete Schülerin kreuzte bei Item 10 im Vortest C an, im Nachtest enthielt sie sich der Stimme.

Ihr Aufmerksamkeitsdiagramm (1) zeigt hohe Werte. In den ersten Stunden war sie zurückhaltend, später meldete sie sich oft und antwortete häufiger richtig als falsch. (Diagramm (5) und (6))
Ihr Hausaufgabenverhalten (7) ist nicht so gut. Zweimal hat sie keine gemacht, dreimal war sie ganz falsch (3., 5. und 6. Stunde) und einmal nur zu 30% richtig.

Im Fragebogen äußerte sie sich so: Der Stoff hat ihr 'gut' gefallen, sie fand den Lehrgang 'sehr leicht' und sie möchte noch mehr davon lernen, "weil man von dieser Mathematik viel lernen" (kann). Ihre Begründung ist nicht recht verständlich. Ich vermute, sie zielt mit dieser Aussage auf die Anwendbarkeit dieser Mathematik im täglichen Leben und

denkt vor allem dabei an die Listenauswertung.

6.2.3. Fragebogen

Gegenüber der 5. Klasse Gymnasium gibt es hier erhebliche Verschiebungen. (Tabelle 11 und 12)
Der höchste Anteil mit 28% fällt auf 'etwas gefallen'.
Mit 'schwer' bzw. 'sehr schwer' stufte auch hier kein Schüler den Lehrgang ein. Aber mehr als die Hälfte der Schüler (55%) möchte in den nächsten Jahren nicht weiter auf diesem Gebiet lernen.
In Tabelle 31 bis 44 sind die Begründungen wiedergegeben. Der 1. Schüler (Nachtest 95%; siehe Tabelle 22) argumentiert z.B. so: Er möchte nicht mehr lernen: "Weil es mir zu langweilig ist und weil es mir keinen Spaß macht. Außerdem bekommen wir da kein Zeugnis und keine Noten".
Der Verlust der Verfügungsstunde wir auch häufig moniert. (Von 7 Schülern)
Eine der positiven Äußerungen ist etwa diese: "Weil es so schön und so leicht war. Weil es gut und nicht schwer zu lernen ist. Weil es mit Spiel gegangen ist und das gefällt mir". (25. Schülerin, Tabelle 31 und 32)

6.3. 5. Klasse Gymnasium (G,2)

Diese 5. Klasse besteht aus 38 Schülern, nur Jungen.
Am Test teilgenommen haben 34 Schüler.
Die erste Fremdsprache ist hier Englisch. Der Notendurchschnitt in Mathematik beträgt 3,26.
Der Mathematiklehrer hat im regulären Mathematikunterricht vom 8.7.80 bis 22.7.80 in 8,5 Stunden den Lehrgang erarbeitet.
Ein Vortest wurde nicht durchgeführt, ebenso keine Beobachtung. Auch den Fragebogen haben diese Schüler nicht beantwortet.
Wie in allen anderen Klassen wußten die Schüler, daß die

Ergebnisse des Tests nicht für die Mathematiknote herangezogen werden.
Nach Auskunft des Mathematiklehrers haben etlich Schüler die Blätter zu früh abgegeben, da der Test in der letzten Stunde stattfand und sie vermutlich keine Lust mehr hatten weiterzumachen.
Hier zeigt sich deutlich - wie auch bei vielen Fragebogen-Antworten in den anderen Klassen - daß nicht nur vereinzelt Schüler ohne folgende Benotung weniger Lern- und Leistungsbereitschaft an den Tag legen. Gute Noten werden als Belohnung aufgefaßt, die ihnen hier versagt bleibt.

6.3.1. Nachtest

Die durchschnittliche Leistung beträgt in dieser Klasse 56% (Tabelle 2 und 24 - 36).

Item 8b "Fähigkeit, das Baumdiagramm (zu 8a) zu zeichnen" fiel am schwersten mit 24%. Es folgen Item 1c mit 28% und 1b sowie 9b mit 29%.
Auch Item 4 (32%), Item 9a (37%) und Item 7 (49%) liegen noch unter 50%.

Sehr gut reagierte diese Klasse auf die Frage 10; denn 47% entschied sich für D. Erstaunlich ist auch, daß von 29% der Schüler gar keine Frage angekreuzt wurde. Es wäre interessant zu wissen, wie die Verteilung aussähe, wenn man die Schüler vorher aufgefordert hätte, sich irgendwie zu entscheiden.

6.4. Vergleich der 5. Klassen (5/G, 5/HS und 5/ G,2)

6.4.1. Nachtest (Tabelle 6, Histogramm)

Die Klassen 5/G und 5/HS haben das gleiche Durchschnittsergebnis im Nachtest erreicht. Der Zeitaufwand differiert allerdings erheblich. Auch wenn man bedenkt, daß in der Klasse 5/HS nur einmal wöchentlich unterrichtet wurde, ist der Unterschied von 7 Stunden sehr groß. (Tabelle 3)

Die Klasse 5/G,2 liegt im Zeitaufwand wie die Klasse 5/G. (Die halbe Stunde Differenz kann man vernachlässigen.) Das Durchschnittsresultat ist mit 56% geringer. Das ist aber eventuell auf den ungünstigen Zeitpunkt der Testabnahme zurückzuführen.

Item 4 wurde in allen drei Klassen schlecht gelöst. (5/G: 48%; 5/HS: 26%; 5/G,2: 32%)
Daraus kann man doch wohl schließen, daß diese Aufgabe schwer ist. (Text der Aufgabe vgl. S. 207)
Zu ihrer Lösung müssen zwei Teilschritte vorgenommen werden:

Feststellen, wieviele Elemente die Ereignisse A bis E haben.
Hier muß das kleine Einmaleins benutzt werden bzw. der Begriff 'größer' und 'kleiner' richtig erfaßt werden.

Die Ereignisse nach ihrer Mächtigkeit ordnen.

Bei dieser Aufgabe spielen also sehr verschiedene mathematische Vorkenntnisse und Fähigkeiten eine Rolle und nur ihre Beherrschung ermöglicht die richtige Bearbeitung.

Alle anderen Items werden entweder von allen Klassen weit überdurchschnittlich gelöst, wie 1a, 2, 3, 5a, 6a, 6b, oder die Ergebnisse unterscheiden sich erheblich.
Auffallend bei 1c, wo die Klasse 5/G sehr viel besser abgeschnitten hat, was ich darauf zurückführe, daß diese Schüler nicht schnell fertig sein wollten, sondern sich genug Zeit zum genauen Auszählen der Häufigkeiten und zum Zeichnen des Blockdiagramms nahmen.

Bemerkenswert ist auch das viel bessere Abschneiden der Klasse 5/HS bei den Items 8a und 8b, "Fähigkeit, alle Dreiertürme aus zwei Farben zu zeichnen" und "Fähigkeit, das Baumdiagramm dazu zu zeichnen". Hier macht sich vermutlich die längere enaktive Phase im Unterricht bemerkbar.

Item 10 (Text der Frage siehe S. 210):

Bei Item 10 schneidet die Klasse 5/G,2 sehr viel besser ab, als die beiden anderen. (Vgl. Tabelle 10)
Bei der Klasse 5/HS ist es dagegen sogar so, daß sich im Nachtest noch weniger Schüler für 'D' entscheiden.

Ob vielleicht in Klasse 5/G,2 mehr auf dieses Item hingearbeitet wurde, kann ohne Dokumentation nicht beantwortet werden. Außerdem fehlt der Vortest, der die Einstellung vor dem Stochastikunterricht angeben könnte.

6.4.2. Beobachtung und Frageboogen

Keiner der vier beobachteten Schüler hat völliges Desinteresse im Unterricht an den Tag gelegt.
Bei beiden schlechten Mathematikschülern ist es sogar so, daß sie sich positiv zu diesem neuen Stoff äußern. Vermutlich hat sie der spielerische Zugang motiviert und ermutigt, sich mehr als bisher zuzutrauen. Beide haben dann auch im Nachtest über ihrem sonstigen Niveau abgeschnitten.
Die Stundenprofile der vier Schüler sind recht ähnlich. Es ist nicht so, daß z.B. der (+)-Schüler des Gymnasiums gehäuft weiterführende Fragen stellen würde und die (-)-Schülerin der Hauptschule nie richtig antworten könnte.

Die Antworten des Frageboogens unterscheiden sich in den beiden Klassen zum Teil erheblich. (Tabelle 11 und 12)
Sehr viel mehr Schülern der Klasse 5/G (nämlich insgesamt 39%) hat dieser Lehrgang gut gefallen. In 5/HS sind es nur 24% und der Schwerpunkt in dieser Klasse liegt bei 'etwas' gefallen mit 28%.
Bei der zweiten Frage nach dem Schwierigkeitsgrad stuft in beiden Klassen kein Schüler den Lehrgang als 'sehr schwer' bzw. 'schwer' ein. Bei 'leicht' (5/G: 61%; 5/HS: 45%) und 'mittel' (5/G: 13%; 5/HS: 27,5%) gibt es Unterschiede, während bei 'sehr leicht' kaum ein Unterschied besteht. (5/G: 26%; 5/HS: 27,5%)

Weit auseinander gehen die Antworten bei der Frage 3 "Möchtest Du in den folgenden Schuljahren noch mehr auf diesem Gebiet lernen?"
In der Klasse 5/G entscheiden sich 78% der Schüler für 'ja', in 5/HS nur 45%.

6.5. 6. Klasse Gymnasium (6/G)

Diese Klasse besteht aus 25 Schülern mit 7 Mädchen und 18 Jungen. Erste Fremdsprache ist Latein.
Ausgewertet werden die Ergebnisse von 29 Schülern, da 3 beim Nachtest fehlten.
Der Klassendurchschnitt der Mathematiknoten beträgt 3,34.

Die Erprobung erstreckte sich vom 10.6.80 bis 15.7.80. Insgesamt wurden 10 Stunden (ohne die Tests) in den regulären Mathematikstunden unterrichtet. Am 10.7.80 wurde der Unterricht im Studio des Instituts für Unterrichtsmitschau dokumentiert.
Die Schüler wußten, daß das Ergebnis des Test für die Mathematiknote nicht herangezogen wird; sie waren aber von ihrem Mathematiklehrer ermahnt worden, wie immer zu arbeiten.

6.5.1. Vor- und Nachtest

Vortest (Tabelle 7, 8 und 41; Texte der Aufgaben S. 213f)

Den Vortest habe ich beaufsichtigt und auch zu Beginn erklärt, daß er nötig ist, um später den Lernzuwachs berechnen zu können. Die Schüler arbeiteten daraufhin 20 Minuten konzentriert, dann wurden sie unruhig und ich habe die Blätter eingesammelt und anschließend gleich damit begonnen, die Schülerskripten zu verteilen und den Fragebogen auf Seite 1 ausfüllen zu lassen. (Schülerskriptum siehe S. 155 bis 185)

Im Vortest erreichte diese Klasse durchschnittlich 9% der Punkte.
Von insgesamt 23 Items konnten 16 (1a, 4a, 4b, 5b, 5c, 5d, 6b, 6d, 6e, 6f, 8a, 8b, 8c, 8d, 9a, 9b) nicht bearbeitet werden.
Item 2 "Fähigkeit, Schnittmengen zu bilden und elementefremde Mengen zu erkennen" wurde zu 85% bearbeitet, was nicht weiter verwunderlich ist, da der Lerninhalt "Mengenverknüpfungen" bereits bekannt ist und der Begriff 'elementefremd' von der Wortbedeutung her leicht richtig verwendet werden kann.

Die Aufgabe 1b (Text Seite 213) wurde trotz des fehlenden Begriffs der relativen Häufigkeit von 59% der Schüler richtig gelöst, da im Bruchrechnen ja vielfach nach 'Anteilen' gefragt wird und das Ordnen von Brüchen bereits geübt wurde.
Item 7 (Text S. 214) wurde von 26% der Schüler richtig gelöst. Alle bildeten eine Gleichung und berechneten dann die Lösung. Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit mußten sie dazu nichts wissen.
Bei den restlichen Items, die von 10%, 7% und 3% der Schüler bearbeitet wurden, handelt es sich um keine fundamentalen Vorkenntnisse. Eher um vermutete, mögliche Ergebnisse, die notiert wurden.
Tabelle 41 veranschaulicht die Verteilung in einem Histogramm.
Bei Item 10 wurde von 65% der Schüler 'C' angekreuzt.
(Tabelle 1 und 10)

Nachtest (Tabelle 7,6 und 42)

Im Nachtest - nach 10 Stunden Stochastik-Unterricht - erreichten die Schüler dieser Klasse durchschnittlich 55% der Punkte. Der Lernzuwachs beträgt 46%.

Item 9b (Tabelle 8) wurde am schlechtesten mit 17% bearbeitet. Das entspricht auch sicher dem Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe, da hier nach der ersten Ziehung die Kugel nicht zurückgelegt wird und dies bei der Berechnung der Pfadwahrscheinlichkeiten zu berücksichtigen ist.
Nach dem Test, beim Einsammeln, hörte ich allerdings auch vielfach, daß Schüler beim Besprechen ihrer Ergebnisse bemerkten, daß sie den Text unaufmerksam gelesen hatten und den Passus - ohne Zurücklegen - übersehen hatten.

Item 6f folgt mit 24%. Hier liegt die Schwierigkeit nicht im Berechnen der Wahrscheinlichkeit, sondern schon in der Vorüberlegung, welche Elemente zum Ereignis "Augensumme kleiner als 6 oder größer als 10" gehören. Dazu hätten am besten alle Paare der Ergebnismenge aufgeschrieben werden müssen - was ich im Unterricht auch betont hatte - , um dann

die entsprechenden Paare abzählen zu können. Zu so viel Aufwand waren aber viele Schüler nicht bereit. Sicher wieder eine Folge der Nicht-Benotung.

Item 8d (29%) "Zeichne die Ergebnismenge mit Hilfe des Baumdiagramms von Aufgabe c" ist nur eine zeichnerische Darstellung im Anschluß an 8c und Item 8c wurde von 59% gelöst. Hier kann man auch nur schließen, daß das zweifarbige Zeichnen der Kugelpaare als lästig empfunden und deshalb übergangen wurde.

Item 6e "Augensumme ist durch 4 teilbar" und Item 9a "Baumdiagramm zu Item 9c zeichnen" folgen mit 30%.
Bei Item 6e liegt das Problem ganz ähnlich wie bei Item 6f. Eine Notierung aller Paare des zweifachen Würfelwurfs hätte die Lösung sehr vereinfacht.

Das Baumdiagramm zu 9a hätten sicher sehr viel mehr Schüler zeichnen können. Ich vermute, daß sie es nicht taten, weil ihnen der weitere Verlauf der Aufgabe unklar war.

Item 8b (45%) ist das letzte der Items, die unter 50% liegen. Hier müssen die Wahrscheinlichkeiten von drei Ereignissen berechnet werden. In Aufgabe 8a (53%) wurde das Baumdiagramm bereits gezeichnet und die Wahrscheinlichkeiten in die Zweige geschrieben. Manche Schüler haben dann in Item 8b nicht genau genug überlegt, welche Paare z.B. zum Ereignis "Erste Ziehung rot" gehören usw. (Text der Aufgabe S. 214)
Die übrigen Items wurden gut bearbeitet. Eine Besonderheit ist noch bei Item 2 zu vermerken; denn hier wurde im Nachtest (82%) schlechter gearbeitet als im Vortest (85%).
Ich führe dieses Ergebnis auf eine gewisse Nachlässigkeit bei einigen Schülern zurück.

Bei Item 10 ergab sich im Nachtest zwar eine Verschiebung zugunsten 'D', aber noch immer entscheiden sich 70% für 'C' Tabelle 1).

6.5.2. Beobachtung

Der gute Mathematikschüler (+) (Tabelle 43 und 44)

Dieser Schüler (2. Schüler in Tabelle 37) hat in Mathematik die Note +2.
Im Vortest erreichte er 7% der Punkte, im Nachtest 90%.
Das beste Ergebnis erzielte in dieser Klasse die 6. Schülerin mit 93%.
Der beobachtete Schüler entschied sich bei Item 10 im Vortest für 'C', im Nachtest für 'D'.

Er war während des ganzen Lehrgangs sehr aufmerksam (Diagramm (1), Tabelle 43) und beteiligte sich besonders rege am Unterricht. (Diagramme (3) und (5))
Die Hausaufgabe (Diagramm (7)) hatte er stets sehr ordentlich gemacht und nur zur 8. Stunde nicht ganz richtig.

Laut Fragebogen (Tabelle 47, Nr. 2) hat ihm der neue Inhalt 'sehr gut' gefallen, er fand den Stoff 'sehr leicht' und er möchte auch in den nächsten Schuljahren Stochastik lernen: "Weil mich alles interessiert".

Der schlechte Mathematikschüler (-) (Tabelle 45 und 46)

Der ausgewählte schwache Mathematikschüler dieser Klasse (Note +5) ist der 9. Schüler der Tabellen 37 und 39.
Er erreichte im Vortest 2% der Punkte, im Nachtest 38%.
(Die wenigsten Punkte erreichte der 22.Schüler mit 11%)
Bei Frage 10 enschied er sich beide Male für 'C'.

Seine Aufmerksamkeit schwankte (Diagramm (1)), er beteiligte sich wenig am Unterricht (Diagramm (3) bis (5)) und auf gezielte Fragen meinerseits antwortete er meistens nicht richtig (Diagramme (5) und (6)).

Die Hausaufgaben waren 5mal nicht gemacht. (Diagramm (7), Tabelle 46)
In der 10. Stunde habe ich ihn daraufhin ermahnt und ihn daran erinnert, daß auch für diesen Unterricht häusliche Mitarbeit vereinbart wurde, sodaß er für die letzte Stunde vorbereitet war und den Nachtest ordentlich bearbeitet hat.

Fünf Schüler waren schlechter als er. (Vgl. Tabelle 39/40)

Im Fragebogen antwortet er mit 'mittel-' auf die Frage, ob ihm der neue Inhalt gefallen hat. Er fand den Lehrgang 'leicht' und möchte mehr Stochastik lernen: "Weils ein bißerl Spaß gemacht hat". Diese Antwort überrascht, denn im Unterricht hat er sich immer wieder anderweitig beschäftigt.

6.5.3. Fragebogen (Text siehe S. 219)

Die Frage 1, wie ihnen dieses Gebiet der Mathematik gefallen hat, beantworten die meisten Schüler (42%) mit 'mittel'. Bei 'gut' sind es 32% und bei 'sehr gut' 12%, während nur jeweils 6,5% 'etwas' bzw. 'gar nicht' ankreuzen. (Tabelle 11)

Zum Schwierigkeitsgrad befragt, entscheiden sich mehr als die Hälfte (52%) für 'mittel'.
In den nächsten Schuljahren noch mehr auf diesem Gebiet lernen möchten 77% der Schüler.

Die Begründungen stehen in den Tabellen 47 bis 49.
Einige möchte ich hier im folgenden erwähnen:
Die 6. Schülerin (Nachtest 95%, Mathematiknote 2) schreibt: "Nein. Für was braucht man das denn? Ich brauche das später doch nicht".
Der 10. Schüler (Nachtest 24%; Mathematiknote 4-) schreibt: "Ja. Weil wir keine Exen schreiben".
Der 22. Schüler (Nachtest 11%, Mathematiknote 4-): "Nein. Weil ich das an Schmarrn find". Er fand den Lehrgang 'sehr schwer' und er hat ihm 'gar nicht' gefallen.
Die 4. Schülerin (Nachtest 46%; Mathematiknote 5-) schreibt, daß ihr der Lehrgang 'sehr gut' gefallen hat, daß der Schwierigkeitsgrad 'mittel' war und daß sie mehr Stochastik lernen möchte: "Weil es mir Spaß macht. Dieser Stoff ist leichter und besser als die normale Mathematik".

Es kommt hier sowohl die Lebensnähe zur Sprache, als auch Freude darüber, daß keine benotete Lernzielkontrolle stattfindet. Manche Schüler, z.B. die oben genannte

vierte Schülerin, finden - vermutlich wegen der häufigen Spielsituationen - besseren Zugang als im sonstigen Mathematikunterricht und steigern sich dann auch zu viel besseren Leistungen.

6.6. 6. Klasse Hauptschule (6/HS)

Diese Klasse hat 29 Schüler. 16 Jungen und 13 Mädchen.
Der Klassendurchschnitt der Mathematiknoten des ersten Halbjahres betrug 3,28.
Die Erprobung erstreckte sich über den Zeitraum vom 14.4.80 bis 23.7.80. Es wurden (ohne Vor- und Nachtest) 16 Stunden unterrichtet.
Der Unterricht fand - wie in Klasse 5/HS - in der Verfügungsstunde statt und mit wenigen Ausnahmen (z.B. Vertretungsstunden für kranke Lehrer) nur einmal wöchentlich statt. Auch in dieser Klasse mußte also zu Beginn jeder Stunde eine relativ lange Wiederholphase eingeplant werden.
Der Unterricht am 25.6.80 wurde im Studio des Instituts für Unterrichtsmitschau aufgenommen.
Auch in dieser Klasse wurde der Test nicht für die Mathematiknoten herangezogen. Hausaufgaben und Mitarbeit wurden aber wie immer erwartet.

6.6.1. Vor- und Nachtest

Vortest

Der Vortest wurde von mir und der Klassenlehrerin beaufsichtigt. Die Schüler versuchten, auf meine Erklärung hin, so viel wie möglich zu lösen. Sie erreichten aber nur 2% im Durchschnitt.
Bei Item 2 "Fähigkeit, Schnittmengen zu bilden und elementefremde Mengen zu erkennen" waren es 22%, bei Item 1b "Fähigkeit, relative Häufigkeiten zu ordnen" 17%.
Bei Item 3 und 4b 3%. (Tabelle 7 und 8). Bei den beiden erstgenannten Aufgaben spielen wieder (vgl. Klasse 6/G) die Vorkenntnisse aus der Mengenlehre und dem Bruchrechnen

eine Rolle.
Tabelle 54 veranschaulicht die Verteilung der Ergebnisse des Vortest. (Dunkle Säulen)

Bei Item 10 haben 72% der Schüler 'C' angekreuzt. (Tabelle 53)

Nachtest

Im Nachtest - nach 16 Stunden Unterricht, aber mit jeweils einer Woche Pause - erreichte diese Klasse 46%. Der Lernzuwachs beträgt 42% (Tabelle 1)

Zur Verteilung der Einzelitems (Tabelle 7 und 8):
Item 6f "Augensumme ist kleiner als 6 oder größer als 10" wurde mit 17% am schlechtesten bearbeitet. In dieser Klasse spielen für das schlechte Abschneiden bei dieser Aufgabe auch logische Probleme eine Rolle. Das 'oder' machte schon während des Unterrichts vielen Schülern Schwierigkeiten.

Die Items 5d, 6e und 9b liegen bei 21%.
Bei Aufgabe 5d "Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Würfeln eine ungerade Zahl aber keine Primzahl zu erreichen?" scheiterten viele Schüler an ihren Primzahlkenntnissen, nicht am Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
Aufgabe 6e "Augensumme ist durch 4 teilbar" (Text der Aufgabe siehe S. 214): Hier fanden es viele Schüler - wie auch in Klasse 6/G - zu umständlich, alle Zahlenpaare aufzuschreiben und dann erst die entsprechenden Paare abzuzählen und übersahen so etliche Paare.
Bei Aufgabe 9b haben viele Schüler den Text nicht genau gelesen und fälschlicherweise das Modell mit Zurücklegen zugrundegelegt.
Item 8b folgt mit 24%. Hier vermute ich wiederum bei einem Teil der Schüler logische Probleme. Es wurde vielfach nicht erkannt, daß die Ereignisse "Zweimal rot" und "Keine Ziehung weiß" dieselben Paare als Elemente haben.

Item 6d und 8d wurden zu 34% bearbeitet. Bei Aufgabe 6d "Kein Wurf eine 1" fehlte wohl die Notierung der Ergebnismenge wie bei Item 6e.

Die gesamte Aufgabe 8 liegt unter 50%. Viele Schüler haben hier nicht genau nach dem Text gearbeitet. (Text S. 214f) Bei 8a (44%) wurde beinahe immer das Baumdiagramm gezeichnet, aber es fehlten die Wahrscheinlichkeiten oder zumindest einige davon. Das Problem bei 8b (24%) habe ich schon auf Seite 239 beschrieben. Bei Item 8c wurden vielfach die Kugeln nicht nummeriert und dann infolgedessen bei Aufgabe 8d die falsche Ergebnismenge gezeichnet.
Die Items 6b, 4a und 5c liegen ebenfalls noch unter 50%, aber der Lernzuwachs beträgt bei allen 45% und darüber.

Tabelle 54 veranschaulicht in einem Histogramm die Verteilung der Ergebnisse. Der Lernzuwachs ist bei allen Items beträchtlich.

Bei Item 10 (Tabelle 53) ergibt sich eine kleine Verschiebung zu 'D', aber es kreuzen noch immer 69% der Schüler die Frage 'C' an.

6.6.2. Beobachtung

Der gute Mathematikschüler (+) (Tabelle 55 und 56)

Dieser Schüler (Nr. 6 in Tabelle 50 und 52) hat in Mathematik die Note 1. Im Vortest erreichte er 6%, im Nachtest 90%. Die 16. Schülerin erreichte die beste Leistung in dieser Klasse mit 95%.
Er entschied sich bei Item 10 beide Male für 'C'.

Dieser Schüler beschäftigte sich immer wieder auch anderweitig (Diagramm (1) in Tabelle 55), beteiligte sich aber rege am Unterricht und antwortete selten falsch und sehr häufig richtig (Diagramm (5) und (6)).
Seine Hausaufgaben hatte er - mit einer Ausnahme - immer gemacht und abgesehen von der 3. und 11. Stunde auch richtig. (Diagramm (7) in Tabelle 56)

Laut Fragebogen (Tabelle 59, Nr. 6) hat ihm der neue Inhalt 'etwas' gefallen, er fand ihn 'leicht', aber er möchte nicht mehr lernen: "Ich bin daran nicht interessiert".

Die schlechte Mathematikschülerin (-) (Tabellen 57 und 58)

Die ausgewählte schwache Mathematikschülerin (Nr. 26 in Tabelle 50 und 52) hat die Mathematiknote 5-6. Sie erreichte im Vortest keinen Punkt, im Nachtest 52%.
Die schlechteste Leistung in dieser Klasse betrug 15%.
(Der 7. Schüler in Tabelle 52 mit Mathematiknote 5)
Bei Frage 10 entschied sich diese Schülerin jedesmal für 'C'.

Ihre Aufmerksamkeit schwankte erheblich. (Diagramm (1), Tabelle 57) In der ersten Hälfte des Lehrgangs stellte sie immer wieder Verständnisfragen, in der zweiten Hälfte beteiligte sie sich viel mehr am Unterrichtsgespräch. (Diagramm (3) bis (6))
Die Hausaufgaben (Diagramm (7) in Tabelle 58) hatte sie zwar stets gemacht, aber nie vollständig, häufig ganz falsch. Sie hat aber aus ihren Fehlern gelernt, denn im Test liegt sie über dem Durchschnitt.
Laut Fragebogen hat ihr der neue Inhalt 'gar nicht' gefallen, sie fand ihn 'mittelschwer' und sie möchte nicht mehr lernen: "Weil es mir nicht gefällt".

6.6.3. Fragebogen

Sehr vielen Schülern hat der neue Inhalt nur 'etwas' gefallen (38%). 17% stimmen für 'gar nicht' bzw. 'mittel' und 28% für 'gut'. (Tabelle 11)

Zum Schwierigkeitsgrad: 69% bezeichnen diesen Inhalt als 'mittel', 14% als 'leicht' und 17% als 'schwer'.
Die Extreme 'sehr leicht' und 'sehr schwer' werden nicht angekreuzt.

Nur 14% der Schüler möchten auch in den folgenden Schuljahren Stochastik lernen.

Im folgenden werde ich wieder einige prägnante Begründungen auswählen. (Tabelle 59 - 61)
Die 16. Schülerin mit dem besten Testergebnis begründet ihr

'nein' so: "Weil ich das in meinem Beruf nicht brauchen kann und nicht so viel Mathe haben will und weil es manchmal ganz schön verzwickt ist".

Der 7. Schüler mit dem schlechtesten Test antwortet auch mit nein und begründet so: "Ich bin daran nicht interessiert."

Der 4. Schüler, der im Test 90% erreichte und in Mathematik als zweiter Schüler dieser Klasse sehr gut hat, verneint auch und begründet:"Es ist irgendwie nicht gut, so komisch, ungewohnt".
Der 2. Schüler, mit einem Testergebnis von 57% und der Mathematiknote 3, dagegen bejaht und seine Begründung lautet: "Weil ich es gut finde, mal was anders in Mathe zu lernen".

Auch hier kehrt die Frage nach der Brauchbarkeit des neuen Inhalts für das spätere Leben wieder. Man wird also vermutlich für das Lernen von Stochastik motivieren können, wenn es gelingt, die Notwendigkeit aufzuzeigen.
Bezeichnend ist ebenfalls die Begründung des 4. Schülers, der diese Art von Mathematik "komisch" und "ungewohnt" findet. Das viele Spielen hat ihn eher irritiert. Immer wieder habe ich dieses Argument auch nach dem Unterricht von anderen Schülern gehört.

6.7. 6. Klasse Gymnasium (6/G,2)

Der Lehrgang wurde vom Mathematiklehrer dieser Klasse im regulären Mathematikunterricht vom 10.7. bis 24.7.1980 in 10,5 Stunden erarbeitet.
Die Klasse 6/G,2 ist eine reine Jungen-Klasse. Englisch ist erste Fremdsprache.
Der Klassendurchschnitt im Fach Mathematik beträgt 3,33 mit 6mal Note 2, 13mal Note 3, 16mal Note 4 und einmal Note 5. (Beim Test waren nur 35 Schüler anwesend.)
Die Schüler dieser Klasse haben keine Namen auf die Testbogen geschrieben, sodaß die Nummerierung in den Tabellen

(Nr. 62 und 63) nach der Reihenfolge der Korrektur erfolgte. Die Mathematiknoten konnten aus diesem Grunde keiner Nummer zugeordnet werden.

6.7.1. Nachtest

Die durchschnittliche Leistung in dieser Klasse beträgt 61%. (Tabelle 2 und 62 bis 64)

Item 6f wurde mit 17% am schlechtesten bearbeitet.
Es folgen Item 6d und 6e mit je 26%. Bei allen drei Items liegt der Grund für die falsche Bearbeitung sicher darin, daß die Paare der Ergeonismenge nicht vorher aufgeschrieben wurden. (Keiner der Schuler hatte auf seinem Bogen eine entsprechende Nebenrechnung stehen.)
Item 5d machte wieder Schwierigkeiten wegen der 1, die zu den Primzahlen gezählt wurde.
Die Items 8b (47%)und 9o (49%) liegen auch noch unter 50%, alle übrigen darüber.
In Tabelle 64 wird die Verteilung in einem Histogramm veranschaulicht.
Bei Item 10 entschieden sich 60% der Schüler für die Antwort 'D'.

6.8. Vergleich der drei sechsten Klassen

6.8.1. Nachtest

Der Unterschied des Zeitaufwandes bei der Hauptschulklasse auf der einen Seite und den beiden Gymnasialklassen auf der anderen Seite ist wieder erheblich.
Auch wenn man berücksichtigt, daß in der Klasse 6/HS nur einmal wöchentlich unterrichtet wurde, ist der Unterschied von 8 Stunden sehr groß. (Tabelle 3)

Die Ergebnisse selbst von 55%, 46% und 61% und einem Lernzuwachs von 46% und 44% bei den beiden erstgenannten Klassen sind zufriedenstellend. Man kann hier deutlich sehen, daß bei differenzierter Zeiteinplanung ungefähr gleiche Lernergebnisse erzielt werden können.

Die Items 6d, 6e und 6f fielen in allen Klassen schwer. Diese Schwierigkeit kann man aber ohne zusätzlichen Zeitaufwand beheben, wenn man verlangt, daß vor der Bearbeitung die Paare der Ergebnismenge notiert werden. Das Abzählen der entsprechenden Paare fällt dann vermutlich nicht mehr schwer.
Das 'oder' bei Item 6f müßte man vielleicht noch öfters in anderen Aussagenverknüpfungen verwenden, um hier mehr Sicherheit zu erreichen.

Item 8b und 9b liegen noch bei allen Klassen unter 50%.
Bei Aufgabe 8b (Text S. 214), bei der vor allem die Klasse 6/HS mit 24% (6/G: 45%; 6/G,2: 47%) niedrig liegt , zeigen sich vermutlich doch Grenzen in den intellektuellen Möglichkeiten. (Was m.E. aber nicht heißen soll, daß diese Anforderung in der Hauptschule weggelassen werden soll, aber vielleicht ist ein späterer Zeitpunkt für viele Schüler geeigneter.)
Bei Item 9b liegen die Klassen 6/G und 6/HS mit 21% und 17% sehr viel schlechter als die Klasse 6/G,2 mit 49%.
Bei beiden Klassen habe ich bereits bei der Einzelbesprechung bemerkt, daß ich sowohl bei der Beaufsichtigung des Tests als auch bei der Korrektur den Eindruck hatte, daß der Text unaufmerksam gelesen wurde. Ein kleiner Hinweis wäre hier nötig gewesen.

Bei Item 10 (Tabelle 10) liegt die Klasse 6/G,2 sehr viel besser als die anderen beiden. Auch hier kann bei dieser Klasse nicht beurteilt werden, ob der Lehrgang diese wünschenswerte Bevorzugung von 'D' bewirkt hat.

Bei den Klassen 6/G und 6/HS gibt es im Nachtest eine Verschiebung zugunsten von 'D'. Hier ist eine Auswirkung des Lehrgangs zwar nicht zu übersehen, aber die Mehrheit

entscheidet sich weiter für 'C': "Eine gut gemischte Auswahl ankreuzen".

6.6.2. Beobachtung und Frageboogen

Auch in dieser Jahrgangsstufe hat keiner der beobachteten Schüler völliges Desinteresse im Unterricht gezeigt. Die beiden guten Mathematikschüler haben sehr rege mitgearbeitet, die beiden schlechten nach einer Anlaufzeit ebenfalls. (Tabellen 43 - 46 und 55 - 58)

Auch hier ist es so, daß der Klasse des Gymnasiums der Lehrgang im Durchschnitt besser gefallen hat und daß die Schüler (77%) noch mehr Stochastik lernen möchten. (Tabelle 11 und 12) Den Schwierigkeitsgrad stufen diese Schüler auch geringer ein.

7. Empfehlungen

7.1. 5. Jahrgangsstufe

Zur Einordnung in das bestehende Curriculum:

Ich sehe hier zwei Möglichkeiten, wo man dieses Teilcurriculum im Lehrplan der 5. Jahrgangsstufe einordnen könnte.

Die erste wäre meines Erachtens gleich zu Beginn des Schuljahres.
In beiden Schularten werden die 5. Klassen neu zusammengestellt. Auch in der Hauptschule ist das der Fall, da nach der Grundschule viele Schüler ins Gymnasium abgehen und Klassen zusammengelegt werden müssen.
Das Sammeln von Daten in der eigenen Klasse würde zu diesem Zeitpunkt ein schnelles Zusammenwachsen der neuen Schülergemeinschaft sicher begünstigen.
Die nötigen Vorkenntnisse, nämlich die aufzählende Mengenschreibweise und der Begriff 'Element einer Menge', sind bereits in der Grundschule Gegenstände des Mathematikunterrichts gewesen, sodaß auch hinsichtlich der Voraussetzungen keine Schwierigkeiten zu erwarten wären.
Durch den neuen Inhalt könnte ebenfalls der i.a. sehr krasse Übergang vom Mathematikunterricht der Grundschule zum Mathematikunterricht der Hauptschule und vor allem des Gymnasiums etwas abgemildert werden.

Die zweite Möglichkeit sehe ich, dieses Teilcurriculum unter Punkt 7 "Die Verbindung der vier Grundrechnungsarten" (KMBl So.-Nr. 15/1977, S. 508 bzw. 4/1976, S. 95) zu subsumieren und an sein Ende zu stellen.

Zur Zeiteinplanung:

Am Gymnasium kann man meines Erachtens (und auch nach Meinung der befragten Lehrer) bei einer weiteren Erprobung 5 Stunden einplanen. Allerdings nur, wenn dieser Unterricht auch in die Notengebung einbezogen wird.

Für die Hauptschule reichen 5 Stunden nicht. Hier müßte man wohl 8-10 Stunden einplanen.

7.2. 6. Jahrgangsstufe

Zur Einordnung in das bestehende Curriculum:

Im gültigen Lehrplan der 6. Jahrgangsstufe wird zum Lernziel 1.6. "Fertigkeit im Ordnen von Bruchzahlen" angemerkt, daß sich aus Aufgaben zur relativen Häufigkeit Anwendungsmöglichkeiten ergeben können. (Vgl. KMBI So.-Nr. 15/1977 S. 516 bzw. 19/1976, S. 668)
Hier kann man also den Abschnitt 1 des Teilcurriculums mit den Lernzielen 1.1. bis 1.5. (vgl. S. 141f) einordnen. Der zweite Abschnitt des Teilcurriculums mit den Lernzielen 2.1.1. bis 2.4.5. (vgl. S. 142 - 146) sollte nach Abschluß des gesamten Bruchrechenlehrgangs behandelt werden, d.h. im Anschluß an den Abschnitt B II 4 (KMBI 15/1977, S. 521 bzw. 19/1976, S. 674).

Zur Zeiteinplanung:

Der Abschnitt 2.1. des Teilcurriculums (vgl. S. 142) fällt weg, wenn bereits in der 5. Klasse Stochastik unterrichtet wurde. Unter dieser Voraussetzung schlage ich am Gymnasium nach den Erfahrungen dieser Erprobung 6 Stunden Unterricht vor, für die Hauptschule 10 Stunden, wobei die Resultate in die Notengebung einbezogen werden müssen, um den wesentlichsten Störfaktor dieser Untersuchung zu eliminieren.

Schlußgedanken

In dieser Arbeit wurde nicht die Tatsache der mangelnden Grund- und Hauptschul-Lehrerausbildung in Stochastik und die Überfrachtung der Lehrpläne erörtert.
Ich möchte hier nur kurz vermerken, daß ich mir über diese Problematik sehr wohl im klaren bin und meine, daß vor einer verbindlichen Einführung des neuen Inhalts die Lehrerausbildung bzw. -fortbildung in Gang zu setzen ist und in den Lehrplänen Platz für den neuen Inhalt geschaffen werden muß.

Das Ziel dieser Arbeit (vgl. meine Ausführungen zur Begründungsproblematik in Abschnitt 3.1., S. 44f) konnte aber auch lediglich sein aufzuzeigen, warum Stochastik bereits in diesen Jahrgangsstufen unterrichtet werden soll und ob man den neuen Inhalt soweit elementarisieren kann, daß er dem Entwicklungsstand dieser Schüler angepaßt werden kann.
Das Teilcurriculum - Stochastik für die 5. und 6. Jahrgangsstufe - wurde schließlich nach gründlichen Vorüberlegungen unter Einbeziehung aller bis zum jetzigen Zeitpunkt bekannten Untersuchungen entwickelt und die Erprobung hat gezeigt, daß die angestrebten Lernziele in beiden Schularten - mit unterschiedlichem Zeitaufwand - sogar ohne den üblichen Notendruck zufriedenstellend erreicht werden können.

Literaturverzeichnis

Achtenhagen, F./Meyer, H. (Hsg):
"Curriculumrevision-Möglichkeiten und Grenzen"
München, 1971

Aebli, H.:
"Grundfragen des Lehrens"
Stuttgart, 1961

Aebli, H.:
"Über die geistige Entwicklung des Kindes"
Stuttgart, 1963a

Aebli, H.:
"Psychologische Didaktik"
Stuttgart, 1963b

Aebli, H.:
"Der Beitrag der Psychologie zur Gestaltung der Lehrpläne", 6. Beiheft, Zeitschrift f.Pädagogik, 1966

Aebli, H.:
"Die geistige Entwicklung als Funktion von Anlage, Reife, Umwelt und Erziehungsbedingungen" in:
Roth,H.(Hsg): Begabung und Lernen, Stuttgart, 1971

Alle, G.:
"Stochastik in der Hauptschule"
Scholle, 7/1978, S. 543-553

Alle, G.:
"Statistik in der Hauptschule"
Scholle, 3/1979, S. 214-224

Andelfinger,B./Nestle,F.:
"Wege zu einer neuen Schulmathematik"
Freiburg, 1967

Andelfinger,B. (Hsg)/Borges,R.:
"Mathematik S-2, Statistik und Wahrscheinlichkeitslehre"
Freiburg, 1978

Anselm, H.:
"Mathematikunterricht in der Grundschule"
München, 1979

Arndt, M.:
"Didaktische Spiele"
Stuttgart, 1974

Athen, H.:
"Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik"
Hannover, 1968

Athen, H.:
"Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf einfache stochastische Prozesse"
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) XXIV, 4, 1971

Ausubel, D.P.:
"Educational Psychology, A Cognitive View"
New York, 1968

Ausubel, D.P.:
"Psychologie des Unterrichts" Band 1 und 2
Weinheim, 1974
Bangen,G./Stender,R.:
"Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik"
Frankfurt, 1973
Bandura, A.:
"Principles of behavior modification"
New York, 1969
Bauer,L.:
"Mathematische Fähigkeiten"
Paderborn, 1978
Bauersfeld, H. (Hsg):
"Curriculumentwicklung"
Gutachten und Studien der Bildungskommission des
Deutschen Bildungsrates Nr. 59
Stuttgart, 1976
Bauersfeld, H. u.a. (Hsg):
"Der Mathematiklehrer in der Ausbildung"
Schriftenreihe des IDM, 11/1977
Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hsg):
"Schulreform in Bayern" Band 2
Kollegstufe am Gymnasium, München, 1972
Bergius, R.:
"Psychologie des Lernens"
Stuttgart, 1971
Beschlüsse der Ständigen Konferenz der Kultusminister (KMK):
"Richtlinien und Rahmenpläne für den Mathematikunterricht", vom 23.3.1956
"Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen" vom 3.10.1968
"Vereinbarung zur Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II" vom 7.7.1972
"Einheitliche Prüfungsanforderungen im Fach Mathematik" vom 6.2.1975
Besuden, H.:
"Über Gewißheit und Unmöglichkeit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 1959/60, Heft 8, S. 370
Bigalke, H.G. (Hsg):
"Einführung in die Mathematik"
8. Schuljahr, Lehrerband, Frankfurt, 1977
Bigalke,H.G./Hasemann,K.:
"Zur Didaktik der Mathematik in den Klassen 5 und 6"
Band 2, Frankfurt, 1978
Bigott, B.:
"Persönlichkeitsbildende Elemente beim Heranführen der Schüler an die stochastische Denkweise im Mathematikunterricht der Klassen 1 - 10"
Mathematik in der Schule, 1976, S. 356-360

Blankertz, H.:
"Theorien und Modelle der Didaktik"
München, 1972
Bloom, B.S.:
"Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich"
Weinheim, 1972
Bobrowitz, F.
"Wahrscheinlichkeit-Kombinatorik-Statistik für unsere Volksschulen"
Blätter für Lehrerfortbildung, 11/1975, S. 428-433
Bobrowitz, F.:
"Das mathematische Erfassen der Wahrscheinlichkeit und die Grundregeln des Zählens in der Hauptschule"
Blätter für Lehrerfortbildung, 1/1976, S. 15-22
Bobrowitz, F.:
"Statistische Aufgaben im Unterricht"
Blätter für Lehrerfortbildung, 6/1976, S. 219-225
Bochenski, J.M.:
"Die zeitgenössischen Denkmethoden"
Bern, 1969
Bock, I.:
"Kommunikation und Erziehung"
Darmstadt, 1978
Boddenberg, E.:
"Mathematik-Didaktik der Vor- und Grundschule"
Ratingen, 1973
Borges, R.:
"Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung I"
Freiburg, 1978
Bower, G.H.:
"Organizational factors in memory"
Journal of Cognitive Psychology, 1970
1:18-46.-S. 146-147
Bredenkamp, K. und J.:
"Was ist Lernen?"
in: Weinert, F.E., u.a., Pädagogische Psychologie, Band 2, Frankfurt, 1974
Breidenbach, W.:
"Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschule"
Hannover, 1969
Brinkmann, G. (Hsg):
"Offenes Curriculum-Lösung für die Praxis"
Kronberg, 1975
Bruhn, J.:
"Vorbemerkung"
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 4/1974
S. 165
Bruner, J.S.:
"Bereitschaft zum Lernen"
in: Weinert,F., Pädagogische Psychologie, Einführung i.d.Problem der Pädagogischen Psychologie des schulischen Lernens, Köln, 1970

Bruner, J.S.:
"Studien zur kognitiven Entwicklung"
Stuttgart, 1971
Bruner, J.S.:
"Entwurf einer Unterrichtstheorie"
Berlin, 1974
Bunt, L.N.H.
"Unterricht in Statistik in holländischen Schulen"
Mathematisch-physikalische Semesterberichte, 6/1959
S. 299-310
Cambridge Conference on School Mathematics:
"Goals for School Mathematics"
Boston, 1963
Cantor, M.:
"Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"
Band I - IV, Stuttgart, 1965 (1899)
Carnap, R./Stegmüller, W.:
"Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit"
Wien, 1959
Carroll, J.B.:
"Lernerfolg für alle"
in: Westermanns Pädagogische Beiträge, 1972, S. 7-12
Chintschin, A.J.:
"Mathematische Grundlagen der Quantenstatistik"
Berlin, 1956
Chiout, H./Steffens,W.:
"Unterrichtsvorbereitung und Unterrichtsbeurteilung"
Frankfurt, 1971(2)
Cohen, J.:
"Subjective probability"
Scientific American, 1957, S. 128-138
Correll, W.:
"Lernpsychologie"
Donauwörth, 1961
Correll, W. (Hsg):
"Programmiertes Lernen und Lehrmaschinen"
Braunschweig, 1965
Courant, R./Robbins,H.:
"Was ist Mathematik?"
Berlin, 1967
Cranach, M.v./Frenz, H.G.:
"Systematische Beobachtung" in: Graumann,C.P.(Hsg):
Sozialpsychologie, Theorien und Methoden, 7. Band,
Handbuch der Psychologie, Göttigen, 1969
Dahrendorf, R.:
"Bildung ist Bürgerrecht"
Hamburg, 1965
Damerow, P. u.a.:
"Elementarmathematik: Lernen für die Praxis?"
Stuttgart, 1974
Danner, H.:
"Methoden geisteswissenschaftlicher Pädagogik"
München, 1979

David, F.H.:
"Games, Gods and Gambling"
London, 1962
Davis, C.M.:
"Development of the probability concept in children"
Child Development 36, 1965 S. 779 - 788
Deutscher Bildungsrat:
"Strukturplan für das Bildungswesen"
Stuttgart, 1970
Dienes, Z.P.:
"Aufbau der Mathematik"
Freiburg, 1965
Dienes, Z.P./Golding, E.W.:
"Methodik der modernen Mathematik"
Freiburg, 1970
Dienes, Z.P.:
"Die sechs Stufen im mathematischen Lernprozeß"
Freiburg, 1971
Dietrich, G./Walter, H.:
"Grundbegriffe der psychologischen Fachsprache"
München, 1970
Dinges, H.:
"Zum Unterricht der Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Mathematisch-physikalische Semesterberichte 1/1976
Dinges, H.:
"Schwierigkeiten mit der Bayesschen Regel"
Mathematisch-physikalische Semesterberichte 1/1978
Drenckhahn, F.:
"Der mathematische Unterricht für die 6-15jährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland"
Göttingen, 1958
Ellrodt, E./Schindler, M.:
"Reform des Mathematikunterrichts
Bad Heilbrunn, 1975
Engel, A.:
"Mathematische Forschung und Didaktik der Wahrscheinlichkeitstheorie" (Les repercussions de la recherche mathématique sur l'enseignement)
Bericht der Konferenz des CIEM, Echternach, 1965
Luxembourg, 1966, S. 271 - 288
Engel, A.:
"Propädeutische Wahrscheinlichkeitstheorie"
Der Mathematikunterricht, 4/1966, S. 5 - 20
Engel, A.:
"Initiation à la Theorie des Probabilités"
in: Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques, (Unesco) Paris, 1966b, S. 159 - 176
Engel, A.:
"Teaching probability in intermediate grades"
in: Rade, L., 1970
Engel, A.:
"Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik"
Band 1 und 2, Stuttgart, 1973, 1976
Engel, A./Varga, T./Walser,W.:
"Zufall oder Strategie"
Stuttgart, 1974

Engel, A.:
"Der Wahrscheinlichkeitsabakus"
Der Mathematikunterricht 2/1975
Ferschl, F.:
"Rationales Verhalten bei Unsicherheit"
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 4/1973, S. 219 - 226
Finetti, B. de:
"Probability, induction and statistics"
London, 1972
Flanders, N.A.:
"Analyzing teaching behavior"
Massachusetts, 1970
Flechsig, K.H. u.a.:
"Probleme der Entscheidung über Lernziele"
in: Programmierter Unterricht, 1/1970
Fischbein, E./Pampu, I./Minzat, I.:
"L'intuition probabilité chez l'enfant"
Enfance 2/1967, S. 193 - 208
Fischbein, E.:
"Enseignement Mathématique et développement intellectuel"
Ed.Stud.in Math. 2/1969, S. 290 - 306
Fischbein, E.:
"Intuition, structure and heuristic methods in the teaching of mathematics"
Developments in mathematical education, Camoridge University Press, 1973, Seite 222 - 232
Fischbein, E.:
"The intuitive sources of probability thinking in children", Dordrecht, 1975
Fischbein, E./Pampu, I./Minzat, I.:
"Einführung in die Wahrscheinlichkeit auf der Primarstufe" in: Steiner, H.G.: Didaktik der Mathematik, Darmstadt, 1978, S. 140 - 160
Freudenthal, H./Steiner, H.G.:
"Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik" in: Behnke, H. u.a. (Hsg): Grundzüge der Mathematik, Band IV, Göttingen, 1966
Freudenthal, H.:
"Wahrscheinlichkeit und Statistik"
München, 1963
Freudenthal, H.:
"Die Mathematik als pädagogische Aufgabe"
Stuttgart, 1973/74
Freudenthal, H.:
"Die Crux im Lehrgangsentwurf zur Wahrscheinlichkeitstheorie" in: Steiner, H.G.: Didaktik der Mathematik, Darmstadt, 1978
Frey, K.:
"Theorien des Curriculums"
Weinheim, 1971
Frey, K., u.a.:
"Curriculum-Handbuch", Band 1 - 3
München, 1975

Fries, E./Rosenberger, R.:
"Forschender Unterricht"
Frankfurt, 1973
Gadamer, H.G.:
"Wahrheit und Methode"
Tübingen, 1975(4)
Gage, N.L.:
"Paradigmen für die Erforschung des Lehrens"
in: Weinert, F.E. (Hsg): Pädagogische Psychologie,
Köln, 1972, S. 70-101
Gage, N.L./Berliner, D.C.:
"Pädagogische Psychologie" Band 1 und 2
München, 1979
Gagné, R.M.:
"Die Bedingungen des menschlichen Lernens"
Hannover, 1969
Gall, H.:
"Notwendigkeit des Unterrichts in Wahrscheinlichkeits-
rechnung und Statistik"
in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 2/1971, S.67
Glaymann, M./Varga, T.:
"Zwischen Unmöglich und Sicher"
Freiburg, 1975
Glaymann, M.:
"Les probabilités à l'école élémentaire"
Educational Studies in Mathematics, Dordrecht 6/1976/4
S. 389 - 393
Glatfeld, M. (Hsg):
"Mathematisches Lernen"
Braunschweig, 1976
Geissler, R.:
"Zum Gesetz der großen Zahl"
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht
(MNU) XV, 5 1962/63, S. 213 - 216
Gnedenko, B.W./Chintschin, A.J.:
"Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Berlin, 1971
Gnedenko, B.W.:
"Developing statistical thinking in secondary schools"
in: The teaching of statistics in schools, Warsaw, 1976,
S. 72-77
Göhner, H./Weber, H.:
"Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Grund-
schule", Die Schulwarte 6/1971, S. 40-54
Griesel. H.:
"Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten"
Band 1 - 3, Hannover, 1971 - 74
Guderian, D.:
"Über Schwierigkeiten der Schüler beim Anwenden der
Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung im außerschuli-
schen Bereich", in: Beiträge zum Mathematikunterricht,
Hannover, 1973
Habermas, J.:
"Erkenntnis und Interesse"
Frankfurt, 1968

Halmos, M.:
"First steps in teaching probability"
in: Statistics at the school level, Stockholm, 1975,
S. 167 - 175
Hanke, B./Mandl, H./Prell, S.:
"Soziale Interaktion im Unterricht"
München, 1974(2)
Heimann/Otto/Schulz:
"Unterricht - Analyse und Planung"
Hannover, 1965
Heitele, D.:
"Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in
Grundschule und Förderstufe"
Dissertation Pädagogische Hochschule Ruhr, 1976
Heitele, D.:
"Fragmente zu einer Geschichte der Wahrscheinlichkeits-
didaktik", in: Didaktik der Mathematik 4/1977, S. 296-306
Hengst, M.:
"Einführung in die mathematische Statistik"
Mannheim, 1967
Hengst, M.:
"Zu 'Existenz' der Wahrscheinlichkeit"
Der Mathematikunterricht, 4/1971
Henkel, P.:
"Erste Resultate und Erfahrungen über die Durchführung
eines fakultativen 'Lehrgangs Wahrscheinlichkeitsrechnung'"
Mathematik in der Schule, 11/1973, S. 237 - 243
Hermes, H.:
"Über eine logische Begründung der Wahrscheinlichkeits-
theorie"
Mathematisch-physikalische Semesterberichte, 5/1957,
S. 214 - 224
Hesse, H.A./Manz, W.:
"Einführung in die Curriculum-Forschung"
Stuttgart, 1972
Hilbert, D.:
"Gesammelte Abhandlungen", Band 3
New York, 1965
Hilgard, E.R./Bower, G.H.:
"Theorien des Lernens" Band 1 und 2
Stuttgart, 1971(2)
Hinz, I.:
"Lehrtheorien"
in: Minsel, W.(Hsg): Unterrichtsgestaltung,
München, 1978
Höfler, A.:
"Didaktik des mathematischen Unterrichts"
Leipzig, 1910
Hole, V.:
"Erfolgreicher Mathematikunterricht"
Freiburg, 1973
Holzkamp, K.:
"Kritische Psychologie"
Frankfurt, 1972

Homme, L./Csanyi, P.:
"Verhaltensmodifikation in der Schulklasse"
Weinheim, 1976
Ineichen, R.:
"Eine Bemerkung zur logischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie"
Mathematisch-physikalische Semesterberichte 13/1966
S. 79-82
Ineichen, R.:
"Über den Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik - Erfahrungen und Anregungen"
Didaktik der Mathematik 2/1980, S. 81-100
Ingenkamp,K.H./Parey, E.(Hsg):
"Handbuch der Unterrichtsforschung" Teil I und II
Weinheim, 1970
Ingenkamp, K.:
"Tests in der Schulpraxis"
Weinheim, 1971
Inhelder, B./Sinclair, H.:
"Das Lernen kognitiver Struktur"
in: Pädagogische Psychologie 1, Graumann/Heckhausen (Hsg)
Frankfurt, 1973
Isenegger, U.:
"Lernzielerhebung zur Curriculumkonstruktion"
Weinheim, 1972
Jäger, J.:
"Stochastische Probleme aus der Eichgesetzgebung"
Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover, 1978
Jäger, J.:
"Stochastik in der Arbeitswelt, Zwischenbericht über eine empirische Untersuchung"
Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover, 1979
S. 178 - 181
Jäschke, K.H.:
"Zur Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Unterricht"
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 20/1967, S. 28-31
Jahner, H.:
"Methodik des mathematischen Unterrichts"
Heidelberg, 1978
Jeger, H.:
"Ein Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung im modernen Mathematikunterricht"
Der Mathematikunterricht, 4/1966, S. 21-47
Jencks, CH.:
"Chancengleichheit"
Hamburg, 1973
Kapadia, R.:
"Statistikunterricht für 11-16jährige"
The Schools Council Project, in: Statistik in der Schule, 1/1979
Kelly, G.A.:
"Der Motivationsbegriff als irreführendes Konstrukt"
in: Thomae,H.(Hsg): Die Motivation menschlichen Handelns, Köln, 1965, S. 498-509

Kinder, H.P./Schmitz, N.B.:
"Bibliographie 'Stochastik in der Schule' I
Didaktik der Mathematik 4/1975, S. 313 - 322
Kinder, H.P./Schmitz, N.B.:
"Bibliographie 'Stochastik in der Schule' II
Didaktik der Mathematik 1/1976, S. 68-83
Klafki, W. u.a.:
"Erziehungswissenschaft, Funk-Kolleg" Band 1 - 3
Frankfurt, 1970
Klauer, K.J., u.a.:
"Lehrzielorientierte Tests"
Düsseldorf, 1972
Köhler, W.:
"Intelligenzprüfungen an Menschenaffen"
Berlin, 1917
König, R. (Hsg):
"Beobachtung und Experiment in der Sozialforschung"
Köln, 1972
Kopp, F.:
"Didaktik in Leitgedanken"
Donauwörth, 1965
Koßwig, F.W.:
"Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs beim Kinde"
Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover, 1975
Koßwig, F.W.:
"Zur Behandlung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Sekundarstufe I"
Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover, 1976
Koßwig, F.W.:
"Beschreibende Statistik als Vorkurs zur Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover, 1978
Koßwig, F.W.:
"Beschreibende Statistik als Anwendung und Motivation von Begriffen der Stochastik"
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 3/1980
Krapp, A.:
"Bedingungen des Schulerfolgs"
München, 1973
Krapp, A./Prell,S.:
"Empirische Forschungsmethoden"
München, 1975
Kratz, J. (Hsg):
"Der Mathematikunterricht in der Kollegstufe"
München, 1972
Kreyszig, E.:
"Statistische Methoden und ihre Anwendungen"
Göttingen, 1968(3)
Krickeberg, K.:
"Wahrscheinlichkeitstheorie"
Stuttgart, 1963
Künzli, R.(Hsg):
"Curriculumentwicklung"
München, 1975

Kütting, H.:
"Der Additionssatz und der Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Der Mathematikunterricht 8/1962, S. 39-63

Kutscher, J. (Hsg):
"Beurteilen und Verurteilen"
München, 1977

Lang, H.:
"Teaching of probability and statistics in secondary schools in Austria"
Statistics at the school level, Stockholm, 1975 S.239-240

Lange, W.:
"Stand und Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule"
Mathematik in der Schule 11/1971, S. 673-686

Leffin, W.W.:
"A study of three concepts of probability possessed by children in the 4.,5.,6. and 7. grades"
Techn.Report Nr. 170, University of Wisconsin, 1971

Lehrpläne der einzelnen Bundesländer:

Baden-Württemberg -Vorläufige Lehrpläne für die Klassen 5 und 6 der Hauptschulen, Realschulen sowie der Gymnasien der Normalform 13. Juni 1977, Lehrplanheft 4/1977

Bayern -Curricularer Lehrplan für den Mathematikunterricht in der 5. Jahrgangsstufe der Hauptschule und aller am Schulversuch Orientierungsstufe beteiligten Schulen
KMBI I So.-Nr. 4/1976

-6. Jahrgangsstufe, KMBI I So.-Nr. 19/1976

-Curricularer Lehrplan Mathematik für die 5.bis 8.Jahrgangsstufe des Gymnasiums KMBI I So.-Nr. 15/1977

Berlin -Erprobungsfassung eines Katalogs von Mindestzielen für den Mathematikunterricht in den Klassenstufen 1/2 (2/1974), 3/4 (2/1975), 5/6 (11/1976)
Berlin, Februar 1977

Bremen -Lehrplan Orientierungsstufe Mathematik im Fachbereich Mathematik/Naturwissenschaften, Bremen, 1976

Hamburg -Rahmenrichtlinien f.d.Fach Mathematik der Jahrgangsstufen 5-10 an Gesamtschulen, in: Richtlinien und Lehrpläne Band V, 1. Teilband, Regensburg, 1976

-Richtlinien und Lehrpläne Mathematik, Beobachtungsstufe des Gymnasiums, in: Richtlinien und Lehrpläne, Band III, Regensburg, 1977

-Richtlinien und Lehrpläne Mathematik, Beobachtungsstufe der Volksschule, Haupt- und Realschule, Band II, Regensburg,1977

Hessen	-Rahmenrichtlinien, Sekundarstufe I Mathematik, 1976
Niedersachsen	-Rahmenrichtlinienentwurf für das Fach Mathematik in der Orientierungsstufe, 1976
	-Handreichungen zu den Rahmenrichtlinien für das Fach Mathematik in der Orientierungsstufe, Stand Februar 1977
Nordrhein-Westphalen	-Lehrplan Mathematik der 5. bis 10.Klassen an Gesamtschulen; Vorläufige Richtlinien Düsseldorf, 1977
Rheinland-Pfalz	-Lehrplanentwurf Mathematik-Orientierungsstufe, Grünstadt, 1972
Saarland	-Vorläufiger Lehrplan für die Klassenstufe 5, Gymnasium, Mathematik, Saarbrücken 1977
	-Vorläufiger Lehrplan für die Klassenstufe 5-Realschule-Mathematik, Saarbrücken 1977
	-Vorläufiger Lehrplan für die Klassenstufe 5-Hauptschule-Mathematik, Saarbrücken 1977
Schleswig-Holstein	-Lehrplan Orientierungsstufe, Mathematik 1977
	-Lehrplan Hauptschule, Mathematik Klasse 7 bis 9, 1976

Lenné, H.:
"Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland"
Stuttgart, 1969

Lewis, D.G.:
"Experimentelle Planung in den Erziehungswissenschaften"
Weinheim, 1974

Lienert, G.A.:
"Testaufbau und Testanalyse"
Weinheim, 1969

Lietzmann, W.:
"Methodik des mathematischen Unterrichts"
Leipzig, 1923

Lindenau, V./Schindler, M.:
"Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Primarstufe und Sekundarstufe I"
Bad Heilbrunn, 1976

Lindenau, V./Schindler,M.:
"Neuorientierung des Mathematikunterrichts"
Bad Heilbrunn, 1978

Lipschutz, S.:
"Theory and problems of probability"
New York, 1968

Lohmann, J./Minsel, B. (Hsg):
"Störungen im Schulalltag"
München, 1978

Loser, F./Terhart, E. (Hsg):
"Theorien des Lehrens"
Stuttgart, 1977

Mager, R.F.:
"Lernziele und Unterricht"
Weinheim, 1977
Maier, H.:
"Didaktik der Mathematik, 1-9"
Donauworth, 1970
Maier, H.:
"Kompendium Didaktik Mathematik"
München, 1977
Mathematisches Laoor
Stuttgart, 1972; Klett-Verlag
Mauthner, F.:
"Wörterbuch der Philosophie, Neue Beiträge zu einer Kritik der Sprache", München und Leipzig, 1910
Menges, G.:
"Grundriß der Statistik"
Teil 1, Köln, 1968
Meschkowski, H. (Hsg):
"Didaktik der Mathematik"
Band 1-3, Stuttgart, 1971 - 1973
Minsel, W.R. (Hsg):
"Curriculum und Lehrplan"
München, 1978
Minsel, B./Roth, W.K. (Hsg):
"Soziale Interaktion in der Schule"
München, 1978
Minsel, W.R./Wunberg, M. (Hsg):
"Schule als Institution"
München, 1978
Mises, R. von:
"Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit"
Wien, 1928
Morgenstern, D.:
"Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik"
Berlin, 1964
Morgenstern, D.:
"Didaktische Schwierigkeiten der Stochastik"
Mathematisch-physikalische Semesterberichte 1/1978
S. 51-51
Müller, A.:
"Selbständigkeit als pädagogischer Leitbegriff"
in: Engfer, H.J.: Philosophische Aspekte schulischer Fächer und pädagogischer Praxis, München, 1978
Müller, G./Wittmann, E.:
"Der Mathematikunterricht in der Primarstufe"
Braunschweig, 1977
Neuhäusler, A.:
"Grundbegriffe der philosophischen Sprache"
München, 1967
Nürnberger Lehrpläne:
in: Lenné, H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart, 1969

Nuthall, G./Snook, I.:
"Modelle des Lehrens"
in: Loser, F./Terhart, E.(Hsg): Theorien des Lehrens,
Stuttgart, 1977
Oberschelp, W.:
"Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Fischer-Lexikon Mathematik, Band 2
Frankfurt, 1966, S. 346-375
OECD(Hsg):
"Synopses for modern secondary school mathematics"
Paris, 1961
OECD (Hsg):
"New thinking in school mathematics"
Paris, 1961
OECD (Hsg):
"Mathematics today - a guide for teachers"
Paris, 1964
Oehl, W.:
"Der Rechenunterricht in der Hauptschule"
Hannover, 1965
Oerter, R.:
"Moderne Entwicklungspsychologie"
Donauwörth, 1971
Otte, M. (Hsg):
"Mathematiker über die Mathematik"
Berlin, 1974
Pankrin, M.:
"Mengen, Zufall und Statistik"
Hannover, 1973
Pankrin, M.:
"Kombinatorik, Wahrscheinlichkeit und Statistik für
die Klassen 1-6"
Bochum, 1972
Papy, F.:
"Les Enfants et la Mathématique"
Band 1-3, Brüssel 1970-1972
Petter, G.:
"Die geistige Entwicklung des Kindes im Werk J.Piagets"
Bern, 1966
Piaget, J.:
"Une expérience sur la psychologie du hasard chez
l'enfant: le tirage au sort des couples"
Acta psychologica 7, 1950, S. 323-336
Piaget, J./Szeminska, A.:
"Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde"
Stuttgart, 1969(2)
Piaget, J.:
"Psychologie der Intelligenz"
Stuttgart, 1971
Piaget, J.:
"Das moralische Urteil beim Kinde"
Frankfurt, 1973
Piaget, J./Inhelder, B.:
"La genèse de l'idée du hasard chez l'enfant"
Paris,(1951), 1974(4)
Piaget, J./Inhelder, B.:
"Die Psychologie des Kindes"
Frankfurt, 1978

Pire, G.:
"Notion du hasard et développement intellectuel"
Enfance, 1958, S. 131-143
Platon :
"Philebos"
in: Platon, Sämtliche Werke, Band 5,
Hamburg, 1959
Polya, G.:
"Mathematik und plausibles Schließen"
Basel, 1963
Polya, G.:
"Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Band 1
Basel, 1966
Popper, K.:
"Logik der Forschung"
Tübingen, 1971(4)
Posteinicu, T.:
"Teaching of statistics at the secondary level"
in: Statistics at the school level, Stockholm, 1975,
Seite 197 - 198
Preli, S./Schiefele, H./Ulich, D.:
"Leistungsdifferenzierung und individuelle Förderung.
Die Untersuchung eines Schulversuchs und seine Probleme"
München, 1972
Preli, S.:
"Erfolgsfeststellung von Orientierungsstufen"
München, 1977
Rade, L.:
"The teaching of probability and statistics"
Wiley, 1970
Rade, L.:
"The teaching of probability and statistics at the
school level - an international survey"
in: Statistics at the school level, Stockholm, 1975,
S. 153-166
Rényi, A.:
"Briefe über die Wahrscheinlichkeit"
Basel, 1969
Rényi, A.:
"Remarks on the teaching of probability"
in: Rade, L.: The teaching of probability and statistics,
1970, S. 273-281
Richter, H.:
"Wahrscheinlichkeitstheorie"
Berlin, 1966
Riedel, K.:
"Lernhilfen zum entdeckenden Lernen"
Hannover, 1973
Robinsohn, S.B.:
"Bildungsreform als Revision des Curriculum"
Neuwied, 1967
Roth, H.:
"Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens"
Hannover, 1957

Roth, H.:
"Begabung und Lernen"
Stuttgart, 1971(7)
Roth, L. (Hsg):
"Handlexikon zur Erziehungswissenschaft"
München, 1976
Roth, L. (Hsg):
"Methoden erziehungswissenschaftlicher Forschung"
Stuttgart, 1978
Salomon, G.:
"Heuristische Modelle für die Gewinnung von Interaktionshypothesen"
in: Schwarzer, R./Steinhagen,K. (Hsg): Adaptiver Unterricht, München, 1975, S. 127-145
Schiefele, H.:
"Schule und Begabung"
München, 1971
Schiefele, H.:
"Über die Führung von Denkvollzügen durch die Lehrerfrage", in: Zöpfl H./Seitz, R. (Hsg): Schulpädagogik, München, 1971, S. 86-95
Schiefele, H.:
"Lernmotivation und Motivlernen"
München, 1974
Schiefele, H./Prell, S.:
"Grundlagen der Didaktik"
München, 1974
Schiefele, H./Krapp, A.:
"Entwicklung und Erziehung"
München, 1974
Schiefele, H./Krapp, A.:
"Grundzüge einer empirisch-pädagogischen Begabungslehre"
München, 1975(2)
Schiefele, H./Prell,S.:
"Ergebnisse zu den Orientierungsstufenversuchen in Bayern" Pädagogisch-psychologische Arbeiten des Seminars für Empirische Pädagogik und Pädagogische Psychologie der Universität München, 1977
Schiefele, H.:
"Auswirkungen eines pädagogisch gestalteten Schullebens auf die Lernbereitschaft der Schüler" in: Blätter für Lehrerfortbildung, München, 1979/7,8
Schiefele, H./Haußer,K./Schneider, G.:
"Interesse als Ziel und Weg der Erziehung"
Zeitschrift für Pädagogik 25/1979, S. 1-20
Schmaderer, F.O. (Hsg):
"Lehrerplanung und Unterrichtsgestaltung"
München, 1977
Schmetterer, L.:
"Grundlagen der Mathematischen Statistik"
Berlin, 1957
Schmidt, W. (Hsg):
"Unterrichtsgestaltung"
München, 1978
Schneider,G./Haußer, K./Schiefele, H.:
"Bestimmungsstücke und Prooleme einer pädagogischen Theorie des Interesses", Zeitschrift für Pädagogik, 25/1979 S. 43-60

Scholz, R.W.:
"Berufliche Fallstudien zum stochastischen Denken"
Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover, 1980
School Mathematics Study Group:
"Probability for Primary Grade"
Pasadena, California, 1966
School Mathematics Study Group:
"Probability for Intermediate Grades"
Pasadena, California, 1966
Schorb, A.O./Louis, B.:
"Unterrichtsanalyse - Ein Grundkurs im Medienverbund"
München, 1975
Schrage, G.:
"Schwierigkeiten mit stochastischer Modellbildung -
zwei Beispiele aus der Praxis"
Journal für Mathematik-Didaktik 1,2/1980
Schreiber, A.:
"Probleme bei der Einführung des Wahrscheinlichkeits-
begriffs" Mathematica didact. 4/1979, S. 235-246
Schulbücher
Andelfinger/Nestle, Mathematik M 6, Freiburg,1976
Andelfinger/Nestle, Mathematik, Freiburg, 1977
Barth/Bergold/Haller, Stochastik, Band 1 und 2,
München, 1980
Bigalke, Einführung in die Mathematik, Frankfurt, 1974
Glatfeld/Löttgen, Mathematik in der Sekundarstufe,
Braunschweig, 1977
Hahn/Dzewas, Mathematik, Braunschweig, 1977, 1978
Hahn/Usoeck, Mathematik, Hamburg, 1975
Hayen/Vollrath/Weidig, Gamma, Stuttgart, 1977
Heigl/Feuerpfeil, Stochastik-Leistungskurs, München, 1976
Köhler/Ostermann/Steinberg, Mathematik in der Sekundar-
stufe, 1975
Kuntze/Sattler, Bausteine der Mathematik, München,
1977, 1978
Lambacher/Schweizer, Rechnen und Raumlehre, Stuttgart,
1972
Neubert/Wölpert, Mathematik-Denken und Rechnen, Braun-
schweig, 1978
Neunzig/Sorger, Wir lernen Mathematik, Freiburg, 1976
Neunzig, Wir lernen Mathematik, Freiburg, 1972
Oehl/Palzkill, Die Welt der Zahl-Neu, München, 1977
Röhrl, Mathematik B, Stuttgart, 1971,1972
Schmitt/Wohlfahrt, Mathematik, München, 1976
Winter/Ziegler, Neue Mathematik, Dortmund
Band 2 1971
Band 3 1972
Band 4 1973
Band 5 1969
Band 6 1970
Band 7 1971
Wörle, Arithmetik mit Geometrie, Gymnasium, München, 1978

Schulz, W.:
"Umriß einer didaktischen Theorie der Schule"
in: Furck, C.L. (Hsg): Zur Theorie der Schule,
Weinheim, 1969
Schupp, H.:
"Einführung in stochastisches Denken anhand des
Galton-Brettes", Beiträge zum Mathematikunterricht,
Hannover, 1976
Schupp, H.:
"Zwischenbericht über das Curriculum-Projekt 'Stochastik
in der Hauptschule', Beiträge zum Mathematikunterricht,
Hannover, 1978
Schupp, H.:
"Stochastik in der Sekundarstufe I"
in: Volk, D. (Hsg): Kritische Stichwörter, 1979a
S. 297-309
Schupp, H.:
"Evaluation eines Curriculum"
Der Mathematikunterricht 5/1979b, S. 22-42
Schupp, H.:
"Zweiter Zwischenbericht über das Curriculum-Projekt
'Stochastik in der Hauptschule', Beiträge zum Mathema-
tikunterricht, Hannover, 1980, S. 307-310
Schwarzer, R.:
"Optimierung von Lernprozessen"
in: Schmidt, W. (Hsg): Unterrichtsgestaltung, München,
1978
Schwarzer, P./Steinhagen, K. (Hsg):
"Adaptiver Unterricht"
München, 1975
Seebach, K.:
"Kybernetik und Schulpädagogik"
in: Zöpfl, H./Seitz, K. (Hsg): Schulpädagogik,
München, 1971
Seebach, K.:
"Strukturierte Mengen"
in: Handbuch der Schulmathematik, Band 7, Hannover, 1967,
S. 49-82
Sherwood, P.:
"Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Grundschule"
Statistik in der Schule, 1/1979
Skinner, B.F.:
"Die Wissenschaft vom Lernen und die Kunst des Lehrens"
in: Correll,W. (Hsg): Programmiertes Lernen und Lehr-
maschinen, Braunschweig, 1965, S. 66-84
Skowronek, H.:
"Psychologische Grundlagen einer Didaktik der Denker-
ziehung", Hannover, 1970
Staatsinstitut für Schulpädagogik München:
"Kollegstufe, Curriculare Lehrpläne f.d. mathematisch-
naturwissenschaftliche-technische Aufgabenfeld", Band IV,
München, (ohne Jahresangabe)
Staatsinstitut für Schulpädagogik München:
"Curriculumarbeit in Bayern", 2. Folge, Modelle und
Ergebnisse, München 1974

Staatsinstitut für Schulpädagogik München:
"Curriculumarbeit in Bayern, 5. Folge, Curriculum Mathematik 5/6", München, 1978
Stender, R.:
"Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Schule"
Mathematisch-physikalische Semesterberichte 3,4/1955
Steinbring, H.:
"Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs - Bernoullis Theorem aus didaktischer Sicht"
Journal für Mathematik-Didaktik 3/80, S. 115-141
Steinbring, H.:
"Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs - das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht", IDM Bielefeld, 1980
Steiner, G.:
"Mathematik als Denkerziehung"
Stuttgart, 1973
Stephan, E./Schmidt, W. (Hsg):
"Messen und Beurteilen von Schülerleistungen"
München, 1978
Stowasser/Petsching:
"Lateinisch-Deutsches Schul- und Handwörterbuch"
Wien-Leipzig, 1919(6)
Sträßer, R.:
"Stochastik in der neugestalteten gymnasialen Oberstufe"
Schriftenreihe des IDM der Universität Bielefeld, 8/1977, S. 342-343
Strehl, R.:
"Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Freiburg, 1974
Szlenk, W.:
"Probability teaching in secondary schools in Poland"
in: The teaching of statistics in schools, Warsaw 1976
S. 50-54
Taba, H.:
"Handbuch der Unterrichtsplanung und Curriculumentwicklung"
Stuttgart, 1974
Tausch, R. und A.-M.:
"Erziehungspsychologie"
Göttingen, 1970
Thom, R.:
"Moderne Mathematik: Ein erzieherischer und philosophischer Irrtum?" in: Otte, M. (Hsg): Mathematiker über die Mathematik, Berlin, 1974
Todhunter, J.:
"A history of the theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace, 1865, Neudruck Chelsea, New York, 1965
Tyler, R.W.:
"Curriculum und Unterricht"
Düsseldorf, 1973
Ulich, D.:
"Pädagogische Interaktion"
Weinheim, 1976

Varga, T.:
"Höhere Mathematik in der Schule"
Mathematik in der Schule 5/1967, S. 355-358
Varga, T.:
"Combinatorials and probability for young children"
Jounal of structural learning, 1969
Varga, T.:
"Logic and probability in the lower grades"
Educational Studies in Mathematics 4/1972
S. 346-357
Vettiger, H.:
"Gruppenunterricht"
Düsseldorf, 1977
Vietoris, L.:
"Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit"
Monatshefte für Mathematik 52, 1948, S. 55-85
Vietoris, L.:
"Zu den Grundlagen der Wahrscheinlichkeit"
Pyramide, 1954
Vogel, W.:
"Wahrscheinlichkeitsmodelle"
Mathematisch-physikalische Semesterberichte 2/1963
Waerden, B.L.van der:
"Der Begriff Wahrscheinlichkeit"
Studium generale, 1951, S. 65-68
Wagemann, E.:
"Narrenspiegel der Statistik"
München, 1950
Wallis, W.A./Roberts, H.:
"Methoden der Statistik"
Hamburg, 1966
Walser, W.:
"Wahrscheinlichkeitsrechnung"
Stuttgart, 1975
Walter, F.R.:
"Der gezinkte Würfel"
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht
(MNU) 5/1975, S. 271-279
Walter, F.R.:
"Elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie"
in: Bigalke, H.G./Hasemann, K.: Zur Didaktik der Mathematik
in den Klassen 5 und 6, Band 2, Frankfurt, 1978
Walter, F.:
"Wider Münze und Würfel"
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht
(MNU) 5/1980, S. 295-297
Weinert, F.E.:
"Lernübertragung"
in: Weinert, F.E. u.a.: Pädagogische Psychologie, Band 2
Frankfurt, 1974
Weinert, F.E., u.a.:
"Pädagogische Psychologie"
Band 1 und 2, Frankfurt, 1974

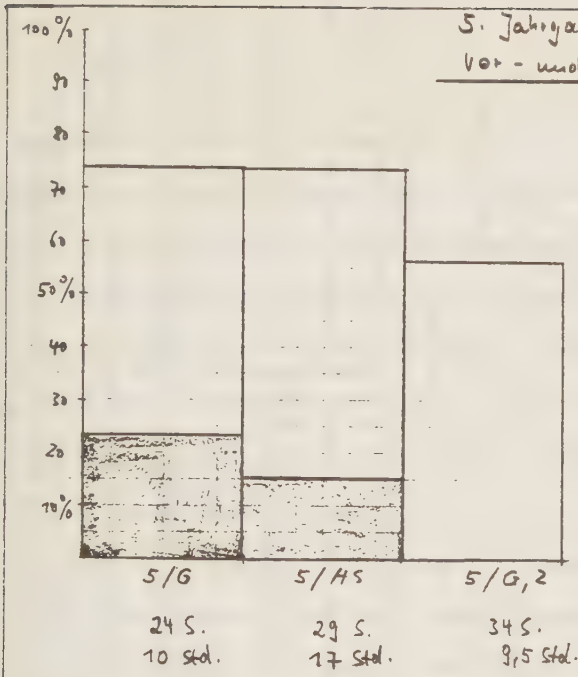
Wenzl, A.:
"Zur Ontologie der Wahrscheinlichkeit"
Der Mathematikunterricht 1/1986, S. 59-62
Wertheimer, M.:
"Produktives Denken"
Frankfurt, 1964
Westphalen, K.:
"Praxisnahe Curriculumentwicklung"
Donauwörth, 1973
Winter, H.:
"Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule"
Beiträge zum Lernzielproblem, Ratingen, 1972
Winter, H.:
"Über den Nutzen der Menglehre für den Arithmetikunterricht"
Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover, 1972/II
Winter, H.:
"Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule"
(Klasse 1-6)
Didaktik der Mathematik 1/1976, S. 22
Wittenberg, A.I.:
"Bildung und Mathematik"
Basel, 1963
Wittgenstein, L.:
"Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik"
Oxford, 1964
Wittmann, E.:
"Grundfragen des Mathematikunterrichts"
Braunschweig, 1974
Wittmann, E.:
"Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaft"
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 3/1974b
Woitschach, M.:
"Strategie des Spiels"
Hamburg, 1971
Wolff, G.:
"Handbuch der Schulmathematik"
Band 1, Hannover, 1966
Wulf, Ch. (Hsg):
"Evaluation"
München, 1972
Wulf, Ch. (Hsg):
"Wörterbuch der Erziehung"
München, 1976
Wunderling, H.:
"Einführung in die Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Simulation"
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 7/1977
Wurz, L.:
"Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht des 6. Schuljahres"
Scholle 2/1979, S. 119-125

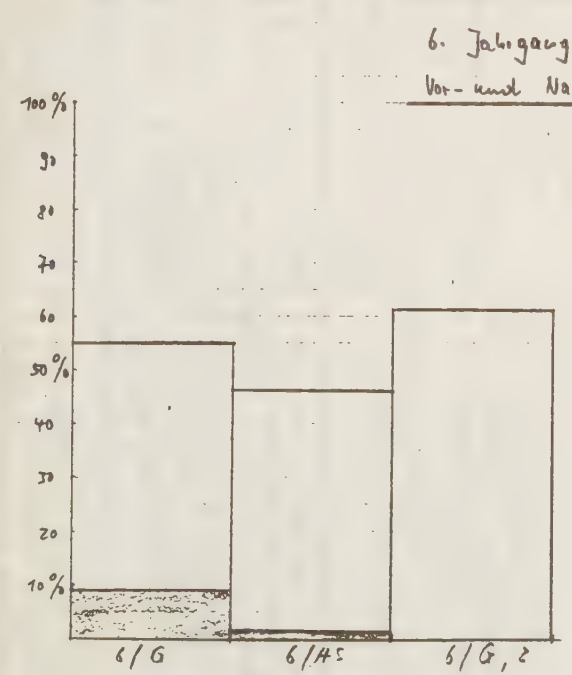
Yost, P.A./Siegel, A./Andrews, J:
"Nonverbal probability judgments by young children"
Child Development 33/1962, S. 769-780
Zech, F.:
"Grundkurs Mathematikdidaktik"
Weinheim, 1977
Zimmer, J.:
"Curriculumforschung:Chance zur Demokratisierung der Lehrpläne" in: Achtenhagen, F./Meyer, H. (Hsg): Curriculumrevision-Möglichkeiten und Grenzen, München, 1971
Zimmermann, E.:
"Das Experiment in den Sozialwissenschaften"
Stuttgart, 1972
Zimmermann, W.:
"Von der Curriculumtheorie zur Unterrichtsplanung"
Paderborn, 1977
Zinnecker, J. (Hsg)
"Der heimliche Lehrplan"
Weinheim, 1976

Anhang

	Klassenfrequenz		Math. Note	Vortest		Stundenanzahl	Nachtest		Zuwachs		Frage 10									
											A		B		C		D		ohne	
	m	w	Du.	Punkte	%	mit Tests	Punkte	%	Punkte	%	V	N	V	N	V	N	V	N	V	N
5/G L	15	9	2,71	(39) 9	23%	10	29	74%	20	51%	4%	13%	4%	4%	71%	65%	13%	17%	-	-
5/HS	13	16	3,10	(39) 6	15%	17	29	74%	23	59%	7%	4%	3%	-	59%	81%	10,3%	7,5%	21%	7,5%
6/G L	25	7	3,34	(54) 5	9%	12	30	55%	25	46%	-	-	4%	4%	85%	70%	11%	26%	-	-
6/HS	16	13	3,28	(54) 1	2%	18	25	46%	24	44%	-	-	-	3%	72%	69%	14%	28%	14%	-

	Klassen-frequenz		Math-Note	Stunden-zahl	Nachtest		Frage 10				
	m	w	Du	mit Test	Punkte	%	A	B	C	D	ohne
5/G,2 E	(37) 34	-	3,26	9,5	(39) 22,3	56%	-	6%	18%	47%	29%
6/G,2 E	35	-	3,33	11,5	(59) 33	61%	3%	6%	28%	60%	3%


5. Jahrgangsstufe
Vor- und Nachtest
100 %
90
80
70
60
50 %
40
30
20
10 %
5/G
5/HS
5/G,2
24 S.
10 Std.
29 S.
17 Std.
34 S.
9,5 Std.

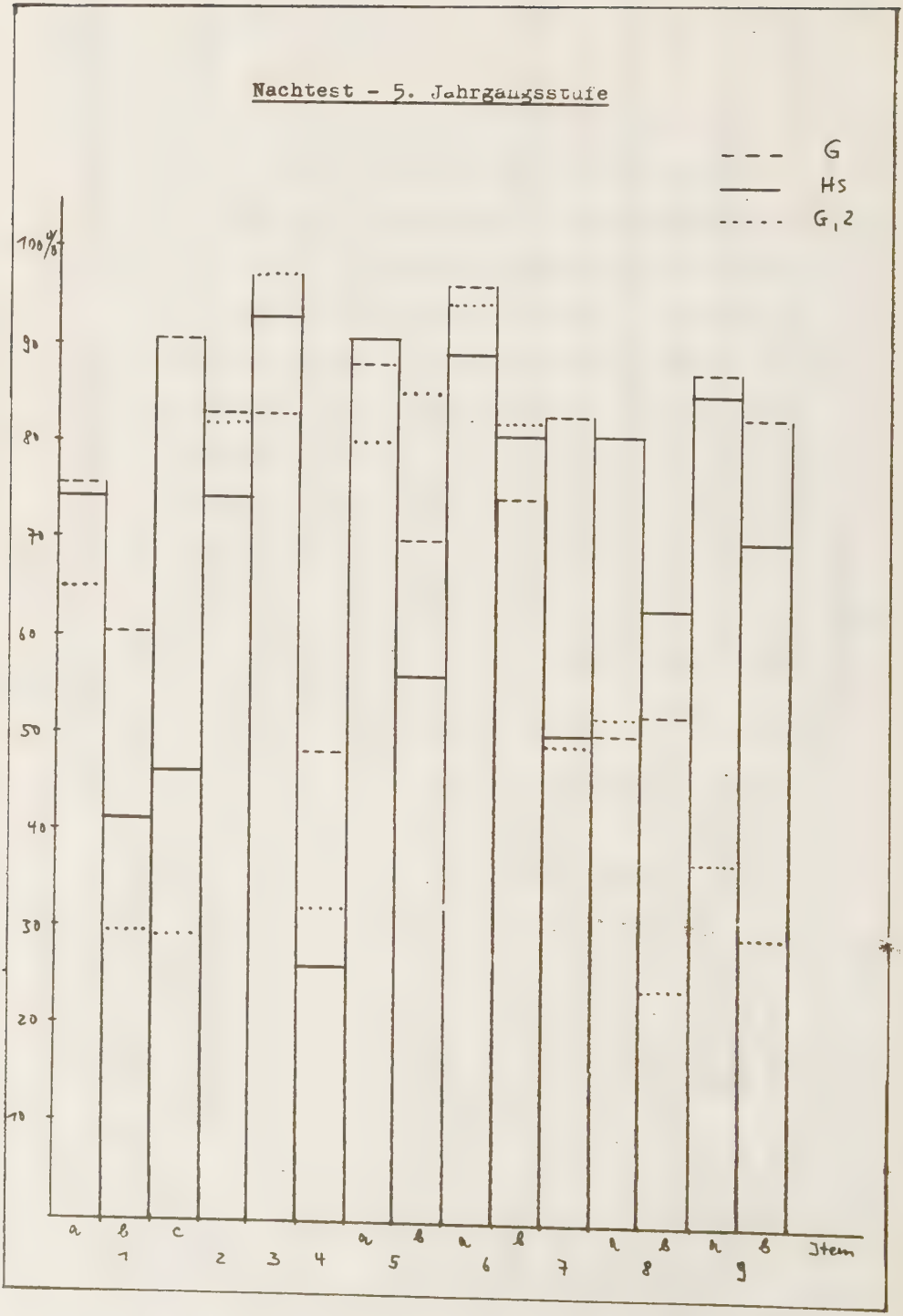

6. Jahrgangsstufe
Vor- und Nachtest
100 %
90
80
70
60
50 %
40
30
20
10 %
6/G
6/HS
6/G,2
32 S.
12 Std.
29 S.
18 Std.
35 S.
11,5 Std.

5. Jahrgangsstufe

Item	Lernziel	Punkte 39	5/G Vortest		5/G Nachtest		5/G Zuwachs		5/HS Vortest		5/HS Nachtest		5/HS Zuwachs		5/G,2 Nachtest	
1a	Fähigkeit, aus einer Menge die Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen in eine Strichliste und	2	0	0	1,52	76%	1,52	76%	0	0	1,48	74%	1,48	74%	1,29	65%
1b	in einem Klassendiagramm darzustellen.	2	0	0	1,22	61%	1,22	61%	0	0	0,81	41%	0,81	41%	0,59	29%
1c	"	2	0	0	1,83	91%	1,83	91%	0	0	0,93	46%	0,93	46%	0,56	28%
2	Fähigkeit, 3 Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen. (Modell: Merkmalsplättchen mit ein, zwei und drei Merkmalen)	7	0,30	30%	0,83	83%	0,53	53%	0,75	75%	0,74	74%	0,59	59%	0,82	82%
3	Fähigkeit, 6 Gleichstände nach ihrem Gewinn ebenen zu ordnen	7	0,78	78%	0,83	83%	0,05	5%	0,59	59%	0,93	93%	0,34	34%	0,97	97%
4	Fähigkeit, 5 Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen. (Modell: Urne mit allen Zahlkärtchen von 1 bis 100)	7	0,73	73%	0,48	48%	0,35	35%	0,07	7%	0,26	26%	0,19	19%	0,32	32%
5a	Fähigkeit, die fehlenden Ergebnisse in dem Baumdiagramm des dreifachen Münzwurfs einzutragen und die Ergebnismenge zu notieren	9	0	0	7,91	88%	7,91	88%	0	0	8,19	91%	8,19	91%	7,24	80%
5b	Fähigkeit des Ordnens von zwei Ereignissen im dreistufigen Experiment (2-mal Zahl; 3-mal Zahl	7	0,22	22%	0,70	70%	0,48	48%	0,15	15%	0,56	56%	0,41	41%	0,85	85%

5. Jahrgangsstufe

Item	Lernziel	Punkte	5/G Vortest		5/G Nachtest		5/G Zuwachs		5/HS Vortest		5/HS Nachtest		5/HS Zuwachs		5/G,2 Nachtest	
6a	Fähigkeit des Notierens der Ergebnismenge des zweifachen Würfelwurfs mit Hilfe des Baumdiagramms	1	0,35	35%	0,96	96%	0,61	61%	0,55	55%	0,89	89%	0,34	34%	0,94	94%
6b	Fähigkeit, drei Ereignisse des zweifachen Würfelwurfs nach ihrer Wahrscheinlichkeit zu ordnen	1	0,26	26%	0,74	74%	0,48	48%	0,07	7%	0,81	81%	0,74	74%	0,82	82%
7	Fähigkeit, mit Hilfe eines Baumdiagramms die Tripel eines 3-fachen kartesischen Produkts abzuzählen (Text: Verkleidungsmöglichkeiten)	2	0,22	11%	1,65	83%	1,43	72%	0,07	3,5%	1,0	50%	0,93	46,5%	0,97	49%
8a	Fähigkeit, alle Dreiertürme aus zwei Farben zu zeichnen	8	3,65	46%	4,0	50%	0,35	4%	2,81	35%	6,52	81%	3,71	46%	4,18	52%
8b	Fähigkeit, das Baumdiagramm dazu zu zeichnen	1	0	0	0,52	52%	0,52	52%	0	0	0,63	63%	0,63	63%	0,24	24%
9a	Fähigkeit, alle Zweiertürme aus drei Farben zu zeichnen, ohne daß in einem Turm eine Farbe doppelt vorkommt	6	3,57	59%	5,22	87%	1,65	28%	1,19	20%	5,07	85%	3,88	65%	2,24	37%
9b	Fähigkeit, das Baumdiagramm dazu zu zeichnen	1	0	0	0,83	83%	0,83	83%	0	0	0,70	70%	0,70	70%	0,29	29%


Nachtest - 5. Jahrgangsstufe
G
HS
G, 2
100 %
90
80
70
60
50
40
30
20
10
a
b
c
1
2
3
4
a
b
5
a
b
6
7
a
b
8
a
b
9
Item

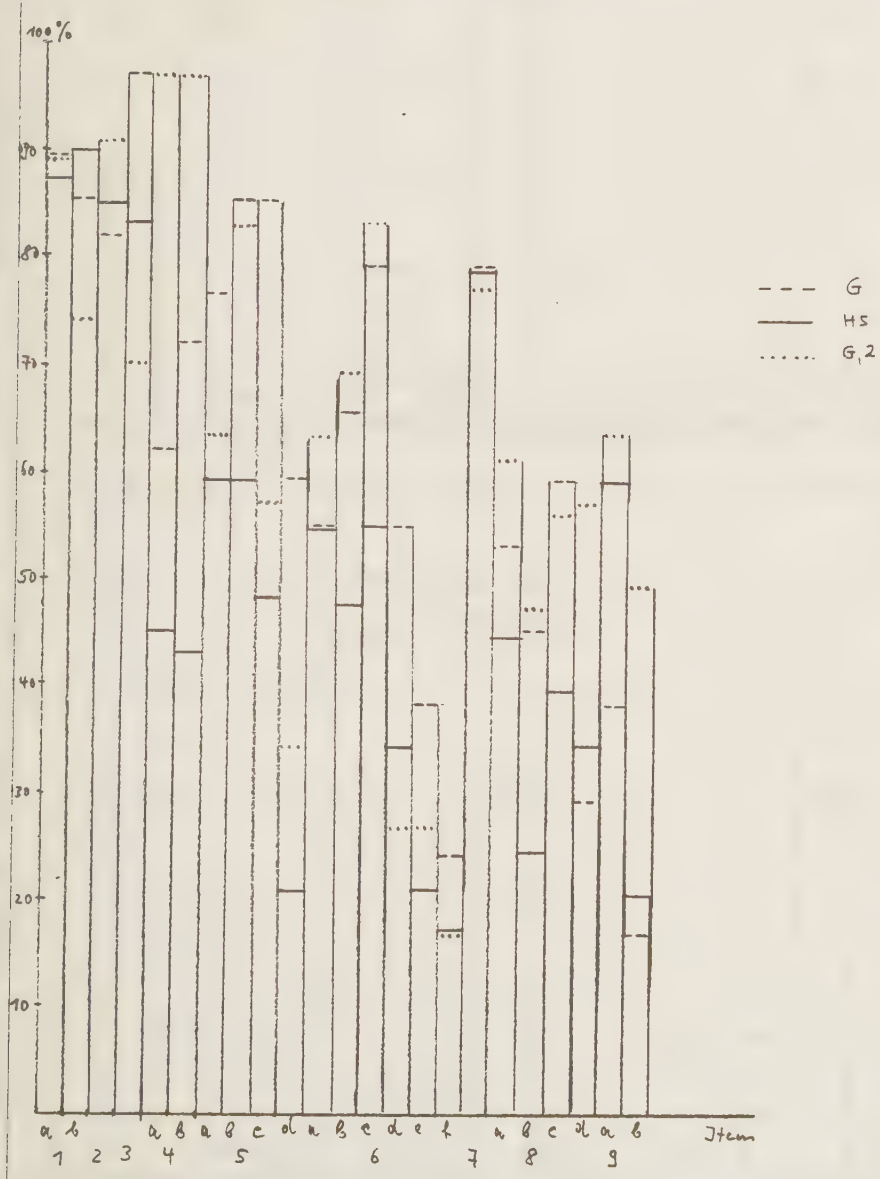
6. Jahrgangsstufe

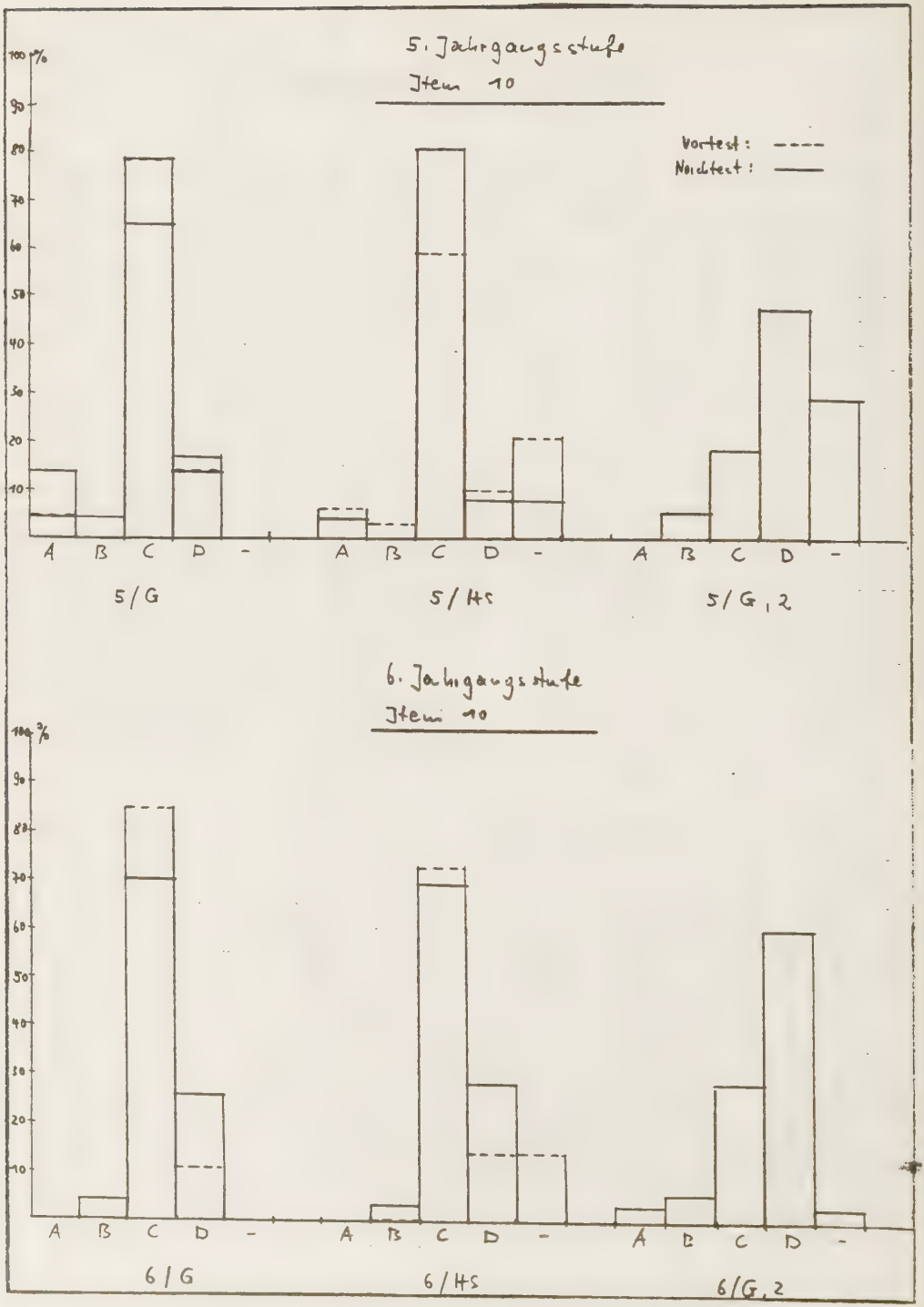
Item	Lernziele	Punkte 54	6/G Vortest		6/G Nachtest		6/G Zuwachs		6/HS Vortest		6/HS Nachtest		6/HS Zuwachs		6G, 2 Nachtest	
1a	Fähigkeit, relative Häufigkeiten zu berechnen	3	0	0	2,66	89%	2,66	89%	0	0	2,62	87%	2,62	87%	2,66	89%
1B	Fähigkeit, relative Häufigkeit (gemeine Brüche Bzw. dezimal-Brüche) zu ordnen	1	0,59	59%	0,86	86%	0,27	27%	0,77	77%	0,90	90%	0,73	73%	0,74	74%
2	Fähigkeit, Schnittmengen zu bilden und elementfremde Mengen zu erkennen	4	3,41	85%	3,28	82%	-0,13	-3%	0,86	22%	3,41	85%	2,55	63%	3,63	97%
3	Fähigkeit im Nennen von Ereignissen im Experiment des einmaligen Würfelns	3	0,31	10%	2,9	97%	2,59	87%	0,03	3%	2,48	83%	2,45	80%	2,11	70%
4a	Kennen oder begriffs 'sicheres Ereignis' und seiner Berechnung	1	0	0	0,62	62%	0,62	62%	0	0	0,45	45%	0,45	45%	0,97	97%
4B	Kennen ob Begriffs 'unmögliches Ereignis' und seiner Berechnung	1	0	0	0,72	72%	0,72	72%	0,03	3%	0,38	38%	0,35	35%	0,97	97%
5a	Fähigkeit des Berechnen der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen im Experiment 1 7-mal Würfeln	1	0,07	7%	0,76	76%	0,69	69%	0	0	0,59	59%	0,59	59%	0,63	63%
5b	a: mindestens 4 Augen b: höchstens 2 Augen	1	0	0	0,86	86%	0,86	86%	0	0	0,59	59%	0,59	59%	0,83	83%
5c	ungerade Zahl, aber c: keine 3	1	0,07	7%	0,86	86%	0,79	79%	0	0	0,48	48%	0,48	48%	0,57	57%
5d	ungerade Zahl, aber d: keine Primzahl	1	0	0	0,59	59%	0,59	59%	0	0	0,21	21%	0,21	21%	0,34	34%
6a	Fähigkeit des Berechnens der Wahrscheinlichkeiten v. Ereignissen im Experiment: 2-mal Würfeln	1	0,03	3%	0,55	55%	0,52	52%	0	0	0,55	55%	0,55	55%	0,63	63%
6B	a: Gleiche Augenzahlen B: Augensumme 12	1	0	0	0,66	66%	0,66	66%	0	0	0,45	45%	0,45	45%	0,69	69%

6. Jahrgangsstufe

Item	Lernziele	Punkte	6/G						6/HS						6/G,2	
			Vortest		Nachtest		Zuwachs		Vortest		Nachtest		Zuwachs		Nachtest	
6c	Augensumme 13	1	0,03	3%	0,79	79%	0,76	76%	0	0	0,55	55%	0,55	55%	0,83	83%
6d	Kein Wurf eine 7	1	0	0	0,55	55%	0,55	55%	0	0	0,34	34%	0,34	34%	0,26	26%
6e	Augensumme ist durch 4 teilbar	1	0	0	0,38	38%	0,38	38%	0	0	0,21	21%	0,21	21%	0,26	26%
6f	Augensumme ist kleiner als 6 oder größer als 10	1	0	0	0,24	24%	0,24	24%	0	0	0,17	17%	0,17	17%	0,77	77%
7	Kenntnis der Additivität von Elementarereignissen und Fähigkeit, eine entspr. Textaufgabe zu lösen	1	0,28	28%	0,79	79%	0,51	51%	0	0	0,79	79%	0,79	79%	0,77	77%
8a	Urnenmodell mit Zurücklegen Nicht numerierte weiße und rote K. Fähigkeit, Baumdiagramm zu	11	0	0	5,86	53%	5,86	53%	0	0	4,83	44%	4,83	44%	6,71	61%
8b	zeichnen und Wahrscheinlichkeiten in Zweige und an d. Pfade einzutragen b: Fähigkeit im Berechnen der	3	0	0	1,34	45%	1,34	45%	0	0	0,72	24%	0,72	24%	1,40	47%
8c	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen c: Kugeln numeriert. Fähigkeit des Baumdiagramm zu zeichnen u. ol.	3	0	0	1,76	59%	1,76	59%	0	0	1,17	39%	1,17	39%	1,69	56%
8d	Wahrscheinlichkeiten einzutragen d: Ergebnismenge aufzustellen	2	0	0	0,59	29%	0,59	29%	0	0	0,69	34%	0,69	34%	1,14	57%
9a	Urnenmodell ohne Zurücklegen Kugeln numeriert a: Fähigkeit, ein Baumdiagramm zu zeichnen	1	0	0	0,38	38%	0,38	38%	0	0	0,59	59%	0,59	59%	0,63	63%
9b	B: Fähigkeit, die Wahrscheinlichkeiten in die Zweige und a. d. Pfade zu schreiben	10	0	0	1,69	17%	1,69	17%	0	0	2,07	21%	2,07	21%	4,86	49%

Nachtest - 6. Jahrgangsstufe

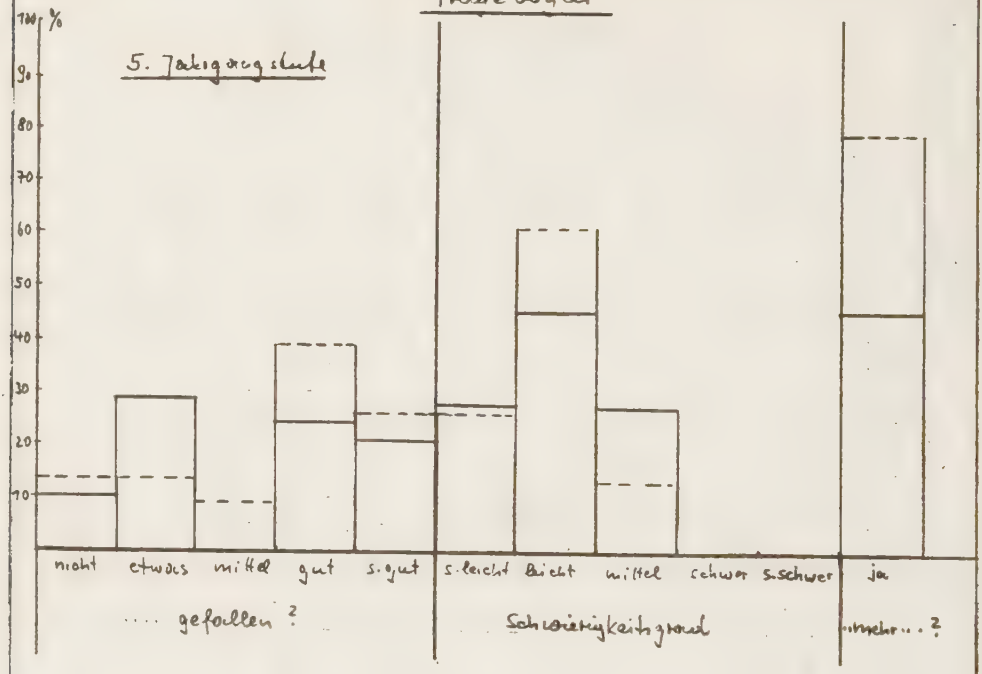



5. Jahrgangsstufe
Item 10
Vortest: ----
Nachtest: ——
100 %
90
80
70
60
50
40
30
20
10
A B C D -
5/G
5/HS
5/G,2
6. Jahrgangsstufe
Item 10
6/G
6/HS
6/G,2

	Wie hast du diesen Gebiet der Mathematik gefallen:					Schwierigkeitsgrad:					Möchtest du in den folgenden Schuljahren noch mehr auf diesem Gebiet lernen?	
	gar nicht	etwas	mittel	gut	sehr gut	sehr leicht	leicht	mittel	schwer	sehr schwer	ja	nein
5/G	3 13 %	3 13 %	2 9 %	9 39 %	6 26 %	6 26 %	14 61 %	3 13 %	–	–	18 78 %	5 22 %
5/HS	3 10 %	8 28 %	5 17 %	7 24 %	6 21 %	8 27,5 %	13 45 %	8 27,5 %	–	–	13 45 %	16 55 %
6/G	2 6,5 %	2 6,5 %	13 42 %	10 32 %	4 13 %	6 19 %	6 19 %	16 52 %	2 6,5 %	1 3,2 %	24 77 %	7 23 %
6/HS	5 17 %	11 38 %	5 17 %	8 28 %	– –	– –	4 14 %	20 69 %	5 17 %	– –	4 14 %	25 86 %

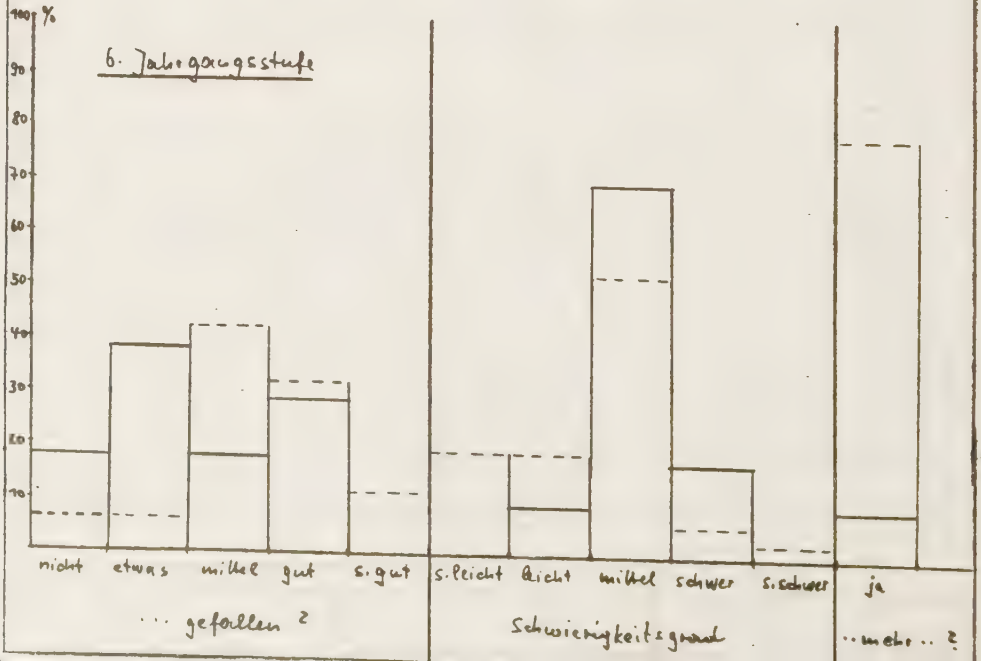
Fragebogen

5. Jahrgangsstufe



---- G
——— Hs

6. Jahrgangsstufe



5. Klasse / Gymnasium 9 w / 15 m 24

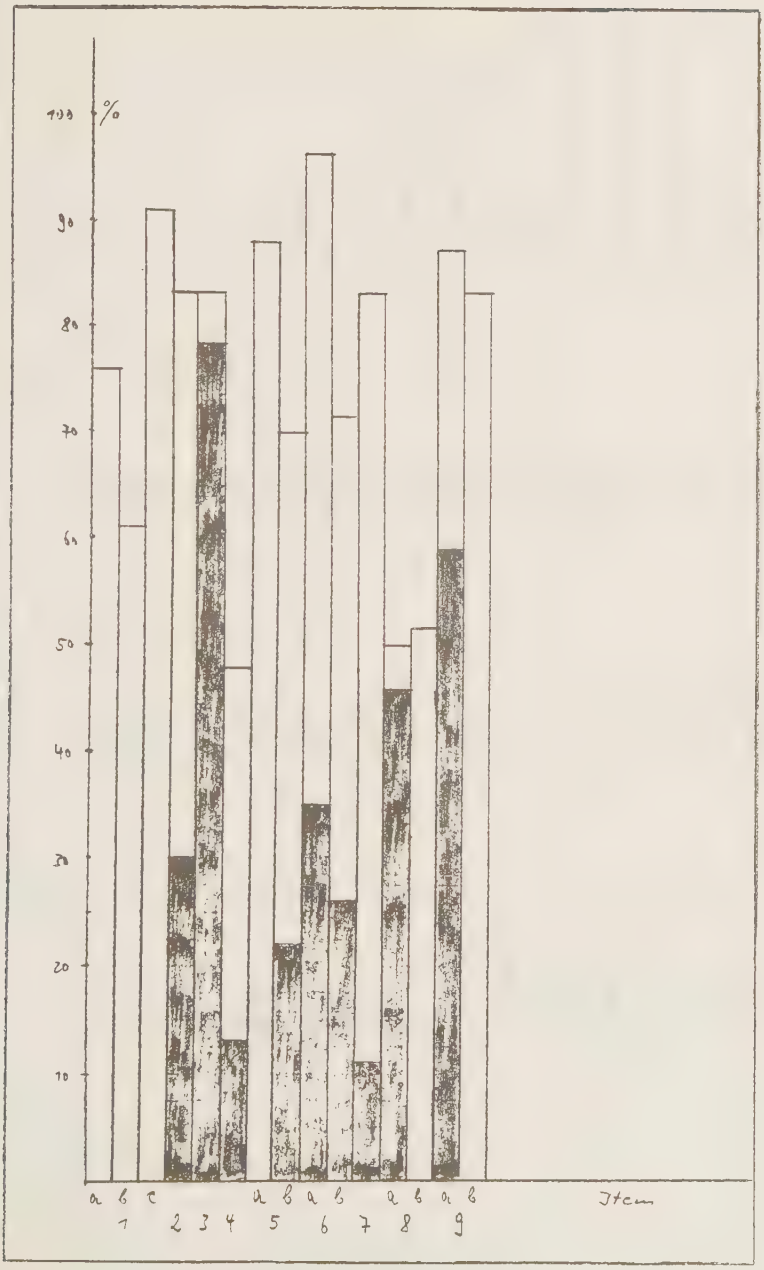
Nr.	G m w	Haus-Note	1 a 2	1 b 2	1 c 2	1 1	2 1	3 1	4 1	5 a 9	5 b 1	6 a 1	6 b 1	7 2	8 a 8	8 b 1	9 a 6	9 b 7	Σ 39	%
1	w	4	-	2	-	2	-	-	1	-	-	9	-	-	1	-	-	2	3	-	1	3 6 - 1	6	27
																						15 %	69 %
2	m	2	-	2	-	1	-	2	1	1	1	1	1	-	9	1	1	1	1	-	1	- - - - 6 - - -	13	19
																						33 %	49 %
3	m	3	-	-	-	-	2	-	1	1	1	-	-	-	1	-	1	1	-	1	-	2 8 6 - - 2 6 - 1	12	23
																						31 %	59 %
4	m	2	-	2	-	2	-	2	1	1	-	1	-	-	9	-	1	1	-	1	-	2 4 - - 6 6 - 1	12	29
																						31 %	74 %
5	m	2	-	-	-	1	-	2	-	1	1	1	1	1	-	9	1	1	-	1	-	- 2 - 7 - 1 5 6 - 1	8	34
																						21 %	87 %
6	w	2	-	2	-	1	-	2	-	1	1	1	-	-	9	-	1	1	-	1	-	2 8 8 - 1 6 6 - 1	16	37
																						41 %	95 %
7	m	2	-	-	-	-	-	2	-	1	1	1	-	-	9	-	1	1	-	1	-	1 - 8 - 1 - - - 1	2	27
																						5 %	69 %
8	m	4	-	2	-	2	-	2	-	1	1	1	-	-	9	1	1	-	1	-	2	- - - 3 2 - -	5	24
																						13 %	62 %
9	w	5	-	2	-	1	-	2	-	-	1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	4 - - 3 6 - 1	8	13
																						21 %	33 %
10	m	2	-	2	-	1	-	2	-	1	1	1	-	1	-	9	1	1	-	1	-	2 8 8 - 1 5 6 - 1	16	38
																						41 %	97 %
11	w	2	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	1	1	8	-	6	-				18	/
																						46 %	
12	w	1	-	2	-	2	-	2	1	1	1	1	-	1	-	9	-	-	1	-	1	- 2 8 - - 6 6 - 1	16	29
																						41 %	74 %
13	w	1	-	2	-	2	-	2	-	1	1	-	-	-	9	-	1	-	1	-	1	- 2 8 7 - 1 5 6 - 1	14	36
																						36 %	92 %
14	m	2	-	-	-	2	-	2	-	1	1	1	1	1	-	9	-	1	-	1	1	1 2 5 8 - 1 - 6 - 1	8	37
																						21 %	95 %
15	m	(4)	-	2	-	1	-	1	1	1	1	1	1	-	9	-	1	1	1	1	1	1 2 8 8 - 1 6 6 - 1	19	37
																						49 %	95 %
16	w	3	-	2	-	2	-	2	1	1	1	1	-	-	9	1	1	-	1	1	-	2 - - - 2 6 - 1	6	29
																						15 %	74 %
17	w	3	-	-	-	2	-	2	-	-	1	-	-	1	-	9	-	-	1	-	1	- - 6 8 - 1 6 6 - 1	13	32
																						33 %	82 %
18	m	4	-	2	-	-	-	2	1	1	1	1	-	-	9	-	-	-	-	-	1	- - - - - 7 6 - 1	3	23
																						8 %	59 %
19	m	3	-	2	-	2	-	2	-	1	1	-	-	-	7	-	1	-	1	-	2	- 8 - 1 5 6 - 1	6	29
																						15 %	74 %
20	w	3	-	2	-	2	-	1	-	1	-	1	9	-	-	1	1	-	-	2	-	- - - - 4 - -	2	24
																						5 %	62 %
21	m	2	-	2	-	-	-	2	-	1	1	1	-	1	-	9	-	1	-	1	-	2 - - - 6 6 - 1	7	28
																						18 %	72 %
22	m	2	-	2	-	-	-	-	-	1	-	1	-	1	-	9	-	1	-	1	1	2 6 8 - 1 6 6 - 1	13	35
																						33 %	90 %
23	m	3	-	2	-	2	-	2	-	1	-	1	-	-	9	-	1	-	1	-	2	- - - - 6 - -	0	28
																						0	72 %
24	m	(4)	-	1	-	-	-	1	-	1	1	1	-	1	9	-	-	1	1	1	2	8 8 - 1 - 6 - 1	12	34
																						31 %	87 %
Durchschnitt		2,71	1,52	7,22	1,83	0,83	0,83	0,48	7,91	0,70	0,96	0,74	7,65	4,0	0,52	5,22	0,83		9	29
			76 %	67 %	91 %	83 %	83 %	48 %	88 %	70 %	96 %	74 %	83 %	50 %	52 %	87 %	83 %		23 %	74 %

5 / G

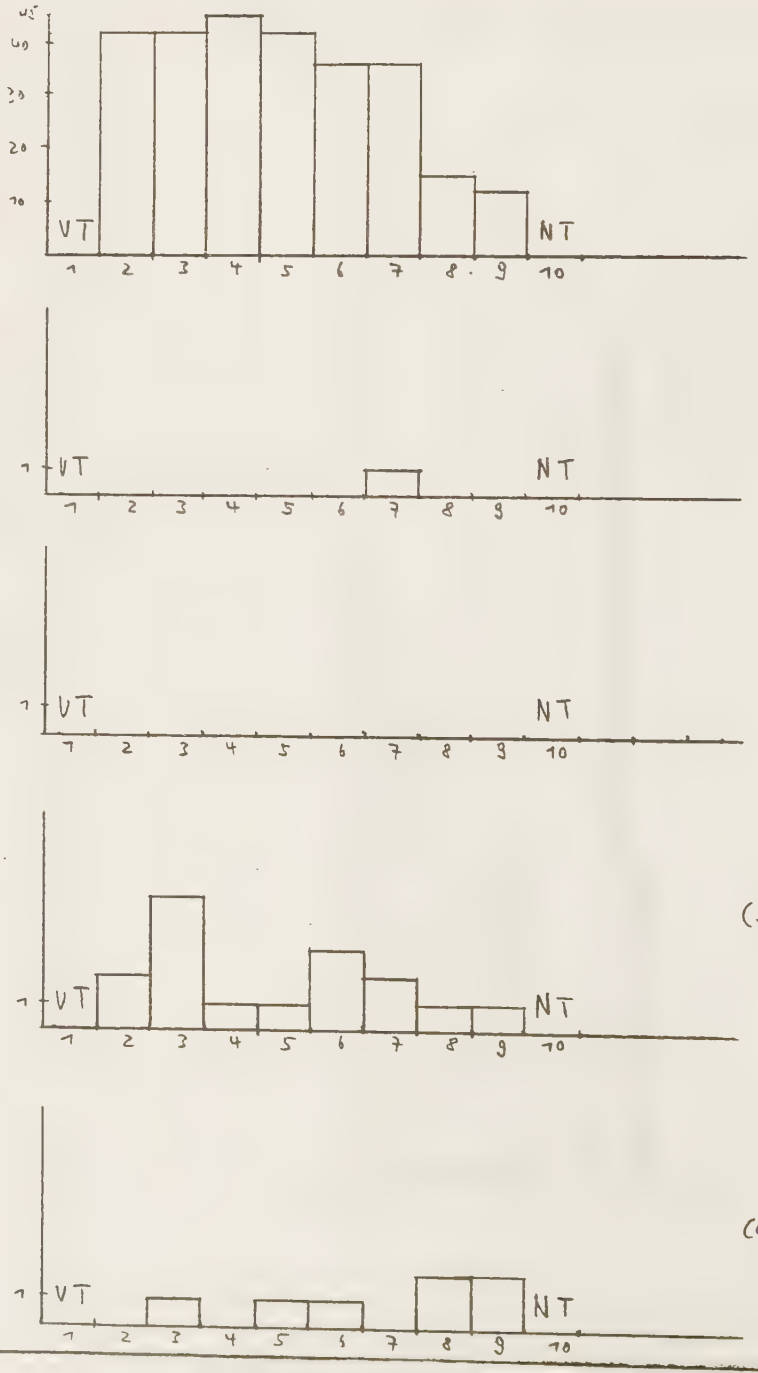
	Frage 10	Zuwachs
1	C C	21 54 %
2	C A	6 16 %
3	C C	11 28 %
4	C C	17 43 %
5	C C	22 56 %
6	C D	21 54 %
7	C C	25 64 %
8	C C	19 49 %
9	C D	5 12 %
10	D A	22 56 %
11	C ÷	÷
12	D D	13 33 %
13	C C	22 55 %
14	C C	29 74 %
15	D C	18 46 %
16	C C	23 59 %
17	C C	19 49 %
18	B C	20 51 %
19	C A	23 59 %
20	C C	22 57 %
21	C C	21 54 %
22	A B	22 57 %
23	C D	28 72 %
24	C C	22 56 %
Durchschn.		20 51 %

Frage 10				
A	B	C	D	
1 4%	1 4%	18 78%	3 13%	Vortest
3 13%	1 4%	15 65%	4 17%	Nachtest

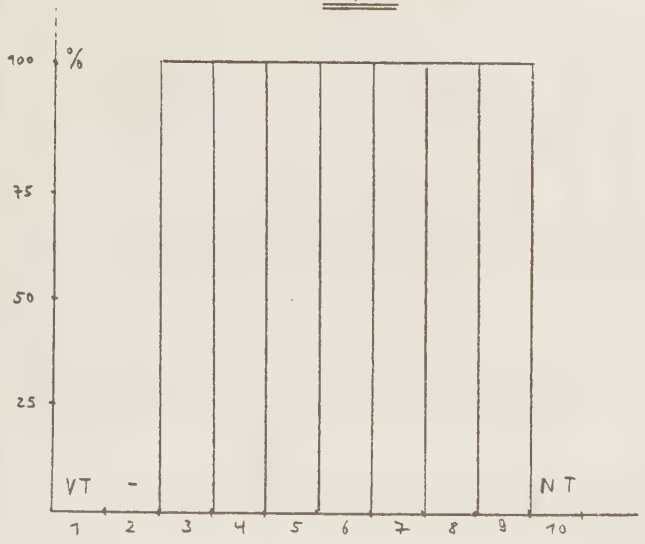
Vor- und Nachtest 5/G



5/G (+) m , Note 2 Nr. 21



5/G (+)

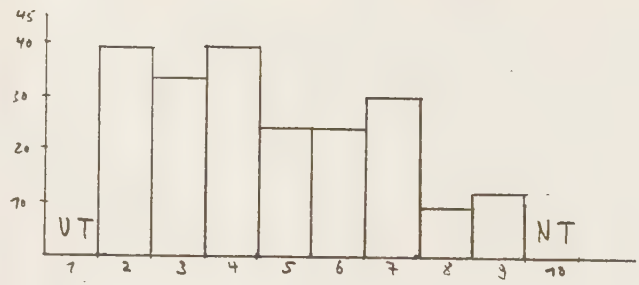


(7)

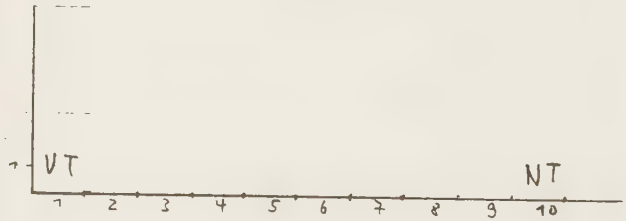
- keine Hausaufgabe

Fragebogen: gar nicht, sehr leicht, mein "Weil ich es langweilig finde."

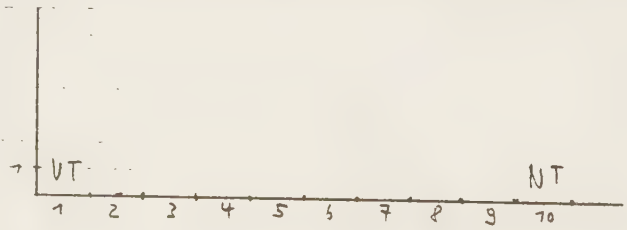
5/G (-) m, Note 4 Nr. 18



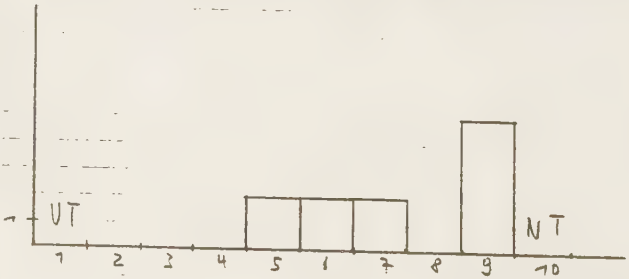
(1)



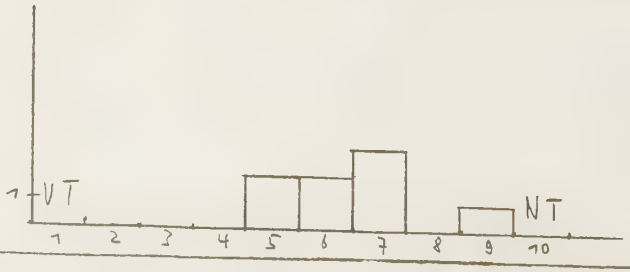
(3)



(4)

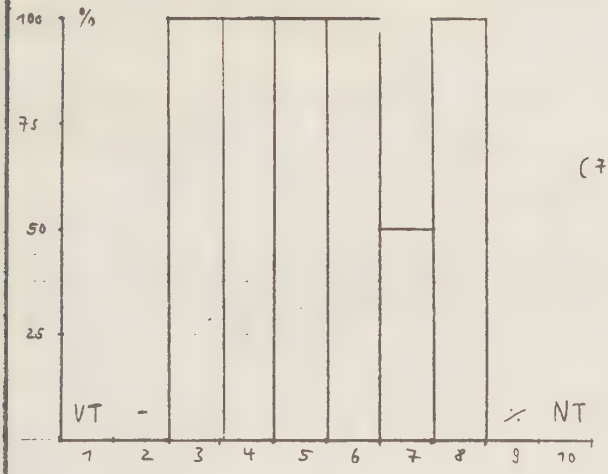


(5)



(6)

5/G (-)



(7)

- keine Hausaufgabe

≒ nicht gemacht

Fragebogen: etwas, sehr leicht, ja

"Weils alas bringt."

Fragebogen 5. Klasse / Gymnasium				
Nr.	Wie gefallen	Schwierigkeitsgrad	Weiter lernen?	Warum?
1	mittel	leicht	ja	Es ist leicht und macht teilweise Spaß. Man muß zwar nicht viel dabei denken
2	gar nicht	sehr leicht	nein	langweilig und kindisch
3	sehr gut	leicht	ja	Weil es uns sehr viel Spaß gemacht hat
4	sehr gut	leicht	ja	Weil es Spaß macht und weil man keine Sorgen braucht.
5	sehr gut	sehr leicht	ja	Weil es so schön leicht ist und es gibt weniger Hausaufgaben
6	sehr gut	leicht	ja	Weil wir dann nicht so viel anderes in Mathematik lernen müssen
7	gut	mittel	ja	Weil man bei den Sachen sich nicht so anstrengen muß und sowieso mit denen >
8	gut	leicht	nein	Weil es mit der Zeit langweilt
9	gut	leicht	ja	Weil es leicht ist und Spaß macht
10	etwas	leicht	ja	Dann hört endlich die doofe Mengenlehre auf
11	–	–	–	–
12	gut	leicht	ja	Weil es nicht schwer ist und man nicht so viel rechnen muß. Weil es Spaß macht
13	gut	sehr leicht	ja	Weil es so leicht ist und dabei Spaß macht. Das kapieren sogar die, die in Mathematik >
14	sehr gut	leicht	ja	Dann hört endlich die Mengenlehre auf
15	sehr gut	leicht	ja	Weil es mir gefällt.
16	gut	leicht	ja	Weil es leicht ist und man fast alles sofort kapiert! Kapieren macht es Spaß! Schade!
17	etwas	leicht	nein	Weil ich das langweilig finde
18	etwas	sehr leicht	ja	Weil's Spaß bringt
19	gut	mittel	ja	Weil man Neues lernt. Mich interessiert der Stoff
20	gut	leicht	ja	Weil es leicht ist und teilweise Spaß macht
21	gar nicht	sehr leicht	nein	Weil ich es langweilig finde
22	gut	leicht	ja	–
23	mittel	mittel	ja	–
24	gar nicht	sehr leicht	nein	Es ist langweilig; sowas hatten wir in der Grundschule gemacht! (Kindergarten) Einmal >

7 Sachen nur spielt. Mir macht es sehr viel Spaß, auf ein Ex
wurde ich mich vielleicht schon freuen. Mein Vater braucht diese Sachen für
8 sein Geschäft.
9
10
11
12
13 sonst nicht gut sind.
14
15
16 daß man in so etwas keine Schulaufgabe schreibt.

24 erklärt und ich schreibe alle Antworten an die Tafel.

5/HS 29 Schüler : 13 m / 16 w

Nr.	G m w	Math. Note	1			2	3	4	5		6		7	8		9		Σ	
			a	b	c				a	b	a	b		a	b	a	b	39	
			2	2	2	1	1	1	9	1	1	1	2	8	1	6	1	%	
1	m	2	-2	-1	-2	-1	1	1	-	-9	-1	1	-1	-2	28	-1	36	-1	8 27%	37 95%
2	m	4	-	-	-	-	1	-1	-	-7	-	-1	-1	-	67	-	65	-	74 36%	22 56%
3	m	3	-2	-1	-1	-	-1	-	-9	1	1	-	-1	-	38	-1	-6	-1	4 10%	30 77%
4	m	2	-2	-2	-2	1	-1	-1	-9	-1	1	-1	-2	68	-1	-6	-1	8 21%	39 100%
5	m	3	-2	-	-	-	-	-1	-	-9	-	-1	-	-	36	-1	-6	-	3 8%	26 67%
6	m	2	-2	-2	-2	-1	1	-1	-9	-1	-1	-1	-2	55	-1	46	-1	10 26%	36 92%
7	m	2	-2	-	-2	-1	1	-	-9	-	1	-1	-	48	-1	-6	-1	6 15%	33 85%
8	m	2	-2	-2	-2	-1	1	-	-9	-1	1	-1	-1	-8	-1	66	-1	10 26%	35 90%
9	m	3	-2	-	-	-	1	1	-1	-	1	-1	1	46	-	-6	-1	8 21%	20 51%
10	m	3	-2	-2	-2	-1	1	-	-9	-1	-1	-1	-2	-8	-1	-6	-1	1 3%	38 97%
11	m	2	-	-	-	-	1	-	-	1	1	1	-	-	-	5	-	9 23%	-
12	m	4	-	-	-	-	-	-1	-	-9	-	-1	-1	-2	-7	-1	26	-1	2 5%	29 74%
13	m	4	-2	-2	-	1	-1	-1	-9	-1	1	1	-1	-2	68	-	-6	-1	8 21%	36 92%
14	w	2	-2	-	-2	-1	1	1	-1	-9	-1	-1	-1	-2	58	-1	36	-1	9 23%	37 95%
15	w	3	-2	-	-2	-1	1	1	-1	-9	-1	1	1	-1	-	-3	8	-1	-6	-1	5 13%	35 90%
16	w	5	-2	-	-	-	-1	-1	-	-9	-	-	-1	1	-	-	-	-	-	-6	-	-	1 3%	20 51%
17	w	3	-2	-2	-	-	-1	1	1	-	-9	-1	1	1	-1	-	-	-8	-1	-6	-1	2 5%	34 87%
18	w	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-9	1	-1	1	-1	-	-2	-3	-	-	-	-	2 5%	15 38%
19	w	2	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-	-9	-1	-1	-1	-1	-2	88	-1	-6	-1	8 21%	38 97%
20	w	4	-1	-	-	-	-	-	-1	-	-	-	-	-	-	-	-	6	-	-	-	-	-	6 15%	2 5%
21	w	4	-1	-	-	-	-1	-1	-	-6	-1	-1	1	1	-	-3	4	-	-	-	-	-	4 10%	16 41%
22	w	3	-	-	-	-	-	-1	1	-1	-9	-	-	-1	-1	-2	-8	-1	36	-1	4 10%	30 77%
23	w	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	-	-	4 10%	-
24	w	2	-2	-	-2	1	1	-	-9	-1	1	1	-1	-2	-8	-1	-6	-1	3 8%	36 92%
25	w	2	-2	-2	-2	-1	1	-1	-9	-1	1	1	-1	-2	-8	-1	-6	-1	2 5%	39

5/H5

Nr.	G m w	Max. Note	1			2	3	4	5		6		7	8		9		Σ	
			a	b	c				a	b	a	b		a	b	a	b	39	
			2	2	2	1	1	1	3	1	1	1	2	8	1	6	1	%	
26	w	3	-2	-2	--	11	11	--	-9	-1	11	-1	--	-8	-1	-6	-1	3 8%	34 87%
27	w	5	-1	--	--	--	-1	--	-9	1-	11	--	-2	34	--	--	--	5 33%	18 46%
28	w	4	--	-2	-1	-1	11	--	-9	-1	11	-1	--	68	--	36	-1	11 28%	32 82%
29	w	2	-1	--	-1	-1	11	--	-9	--	1-	--1	-1	36	--	26	--	7 18%	27 69%
Durchschnitt		3,10	1,48 74%	0,87 44%	0,93 46%	0,74 74%	0,93 93%	0,26 26%	8,79 91%	0,56 56%	0,89 89%	0,87 87%	1,0 50%	6,52 81%	0,63 63%	5,07 85%	0,70 70%	6 75%	29 74%

5 / HS

Nr	Frage 19 1 B C D	Zuwachs
1	C C	29 74%
2	C C	8 20%
3	C C	26 67%
4	C C	31 79%
5	C C	23 59%
6	D C	26 66%
7	– C	27 70%
8	C C	25 64%
9	C C	12 30%
10	D D	39 94%
11	C –	–
12	C C	27 69%
13	C C	28 71%
14	C C	28 72%
15	D D	30 77%
16	C C	19 48%
17	B C	32 82%
18	C –	13 33%
19	– C	30 75%
20	– C	-4 -10%
21	C C	12 31%
22	A A	26 67%
23	A	–
24	– C	32 82%
25	– C	37 95%

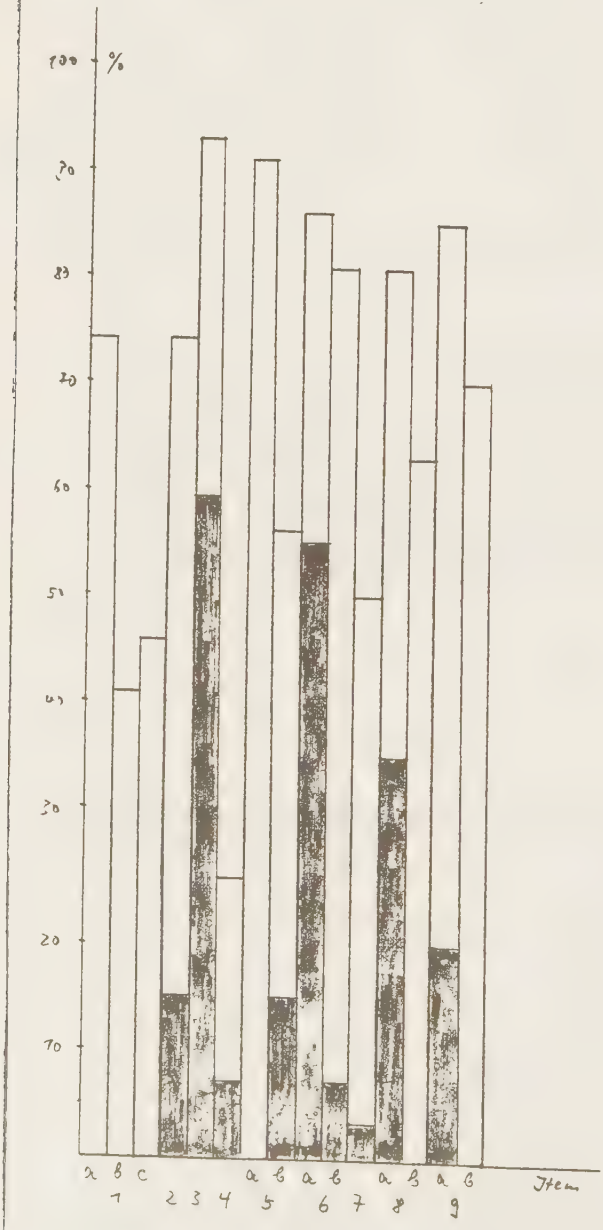
5/HS

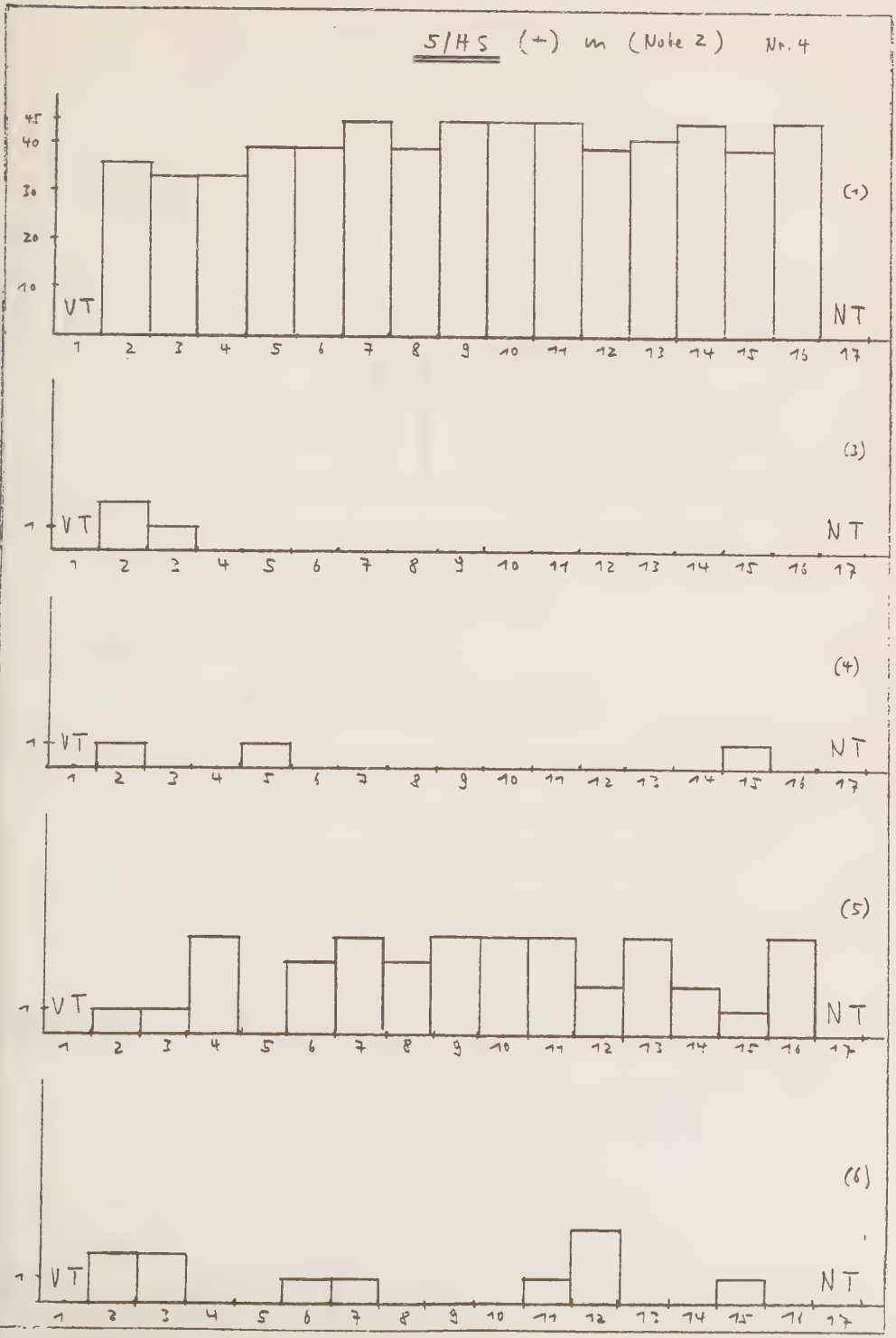
Nr.	Frage 10 A B C D	Zuwachs
26	- C	31 79%
27	C C	13 33%
28	C C	21 54%
29	C -	20 51%
23,14		23 59%

Frage 10					
A	B	C	D	ohne	
2 7%	1 3%	17 59%	3 10%	6 21%	Vortest
1 4%	-	22 81%	2 7,5%	2 7,5%	Nachtest

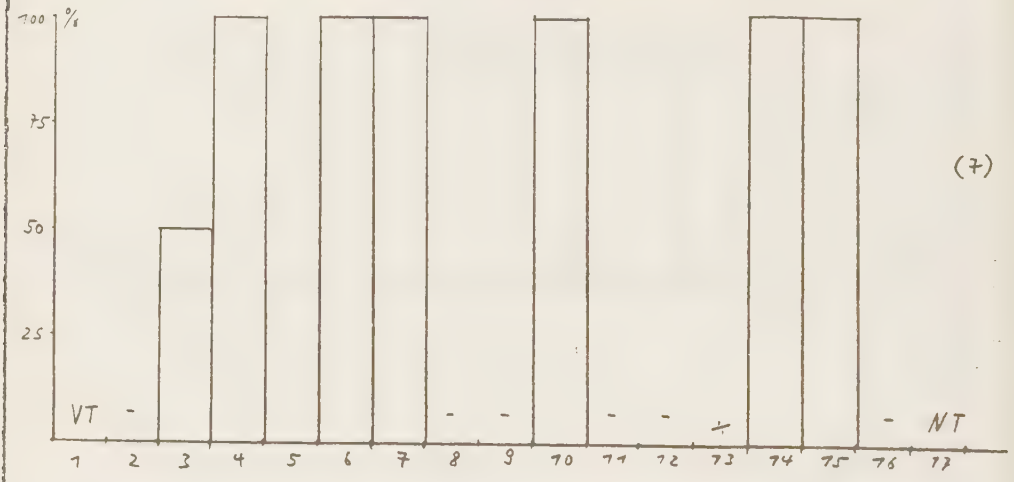
5/HS

Vor- und Nachtest




S/HS (+) m (Note 2) Nr. 4
45
40
30
20
10
VT
NT
(1)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
(3)
(4)
(5)
(6)

5/HS (+)



(7)

– keine Hausaufgabe

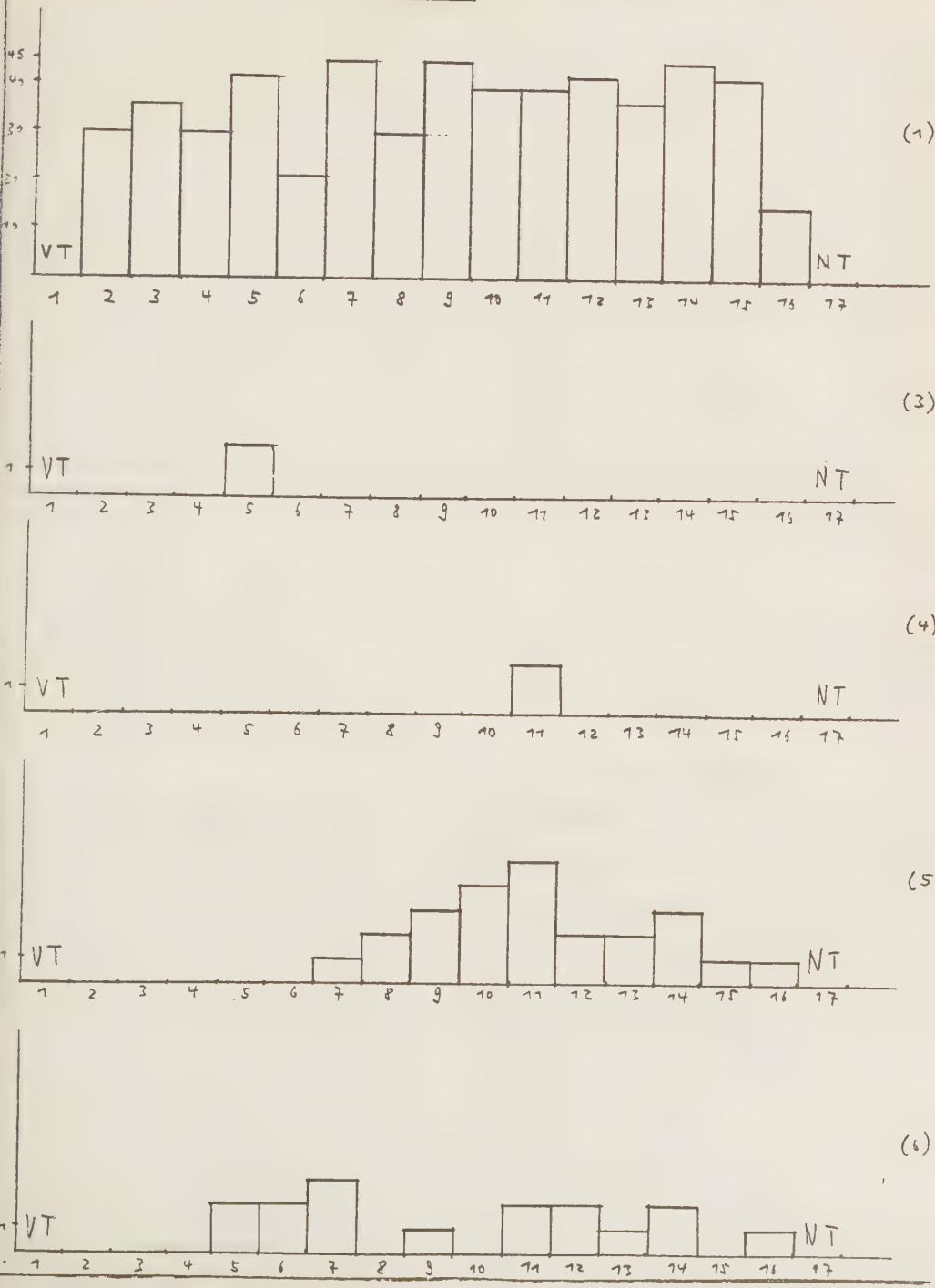
÷ nicht gemacht

Fragebogen: etwas, bockt, weil

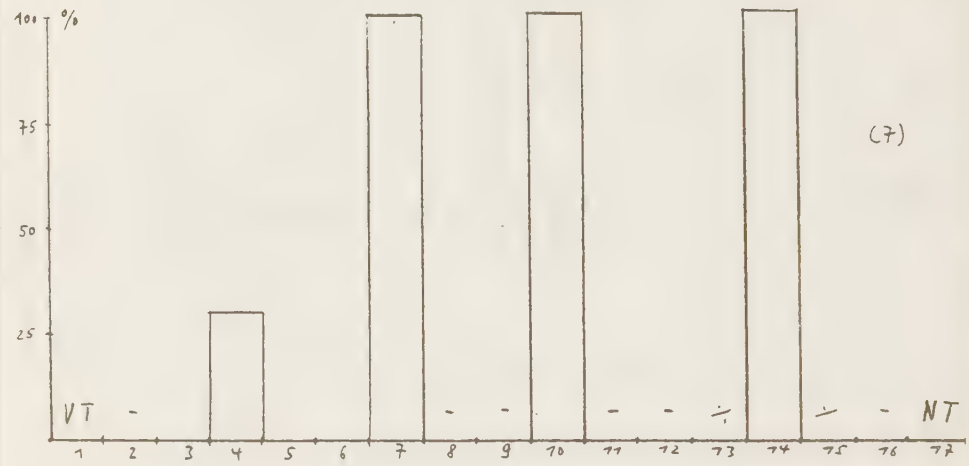
" Wir verlieren die Verfügungsstunde;

manchmal langweilig.

5/HS (-) W (Note 5) N. 18



5/HS (-)



- keine Hausaufgabe

/ nicht gemacht

Fragebogen: gut, sehr leicht, ja

"Weil man von dieser Mathematik viel lernen (kann).

5/HS Fragebogen

Nr.	Wie gefallen:	Schwierigkeit:	Mehr davon lernen	Warum:
1	gar nicht	mittel	nein	Weil es mir zu langweilig ist und weil es mir keinen Spaß macht. Aufpassen
2	etwas	leicht	nein	Diese Unterricht macht mir kein Spaß. Wir verlieren eine Verfügungsstunde
3	mittel	mittel	nein	Weil es so langweilig war
4	etwas	leicht	nein	Wir verlieren die Verfügungsstunde; manchmal langweilig
5	etwas	mittel	nein	Dieser Unterricht gefällt mir nicht, weil es mir keinen Spaß macht
6	etwas	leicht	nein	Wir verlieren die Verfügungsstunde. Manchmal langweilig
7	gut	mittel	nein	keinen Spaß
8	gut	mittel	nein	Weil es langweilig ist und keinen Spaß macht
9	gut	mittel	nein	Weil es langweilig ist und keinen Spaß macht
10	etwas	leicht	nein	Wir verlieren die Verfügungsstunde. Es macht nicht Spaß, langweilig
11	sehr gut	sehr leicht	ja	Weil es mir Spaß macht wegen den Zeichnungen
12	mittel	leicht	ja	
13	etwas	leicht	nein	Wir verlieren die Verfügungsstunde, manchmal langweilig
14	mittel	sehr leicht	ja	Weil es mir Spaß macht und weil es nützlich ist für die
15	sehr gut	mittel	nein	
16	gut	sehr leicht	ja	Weil es sehr leicht ist und weil es Spaß macht
17	mittel	leicht	ja	Weil es manchmal Spaß macht und weil wir das auch manchmal
18	gut	sehr leicht	ja	Weil man an diese Mathematik viel lernen (kann)
19	gut	leicht	ja	Es war bloß einmal in der Woche und der halbe war genug Zeit,
20	gar nicht	leicht	nein	Weil es mir nicht gefallen hat
21	etwas	leicht	nein	Weil wir die Verfügungsstunde verlieren und weil es keinen
22	mittel	sehr leicht	ja	Weil mir diese Art von Mathematik Spaß macht
23	gar nicht	mittel	nein	Weil mir dieses Gebiet nicht gefällt
24	sehr gut	sehr leicht	ja	Weil es mir gefällt und, Spaß macht
25	sehr gut	leicht	ja	Weil es so schön und so leicht war. Weil es gut und nicht schwer
26	sehr gut	leicht	ja	Weil es Spaß macht, und ich lerne [illegible] Weil es gut und manchmal

5/HS Fragebogen

1	bekommen wir da kein Zeugnis und keine Noten
2	
3	
4	
5	Wir verlieren eine Verfügungsstunde.
14	klassen nach uns.
17	Spiele mit Würfeln machen, oder mit anderen Dingen.
19	um die Hausaufgaben zu machen. Außerdem war der Stoff interessant und man bekam ihn auch leicht mit
29	Spaß macht.
25	zu lernen ist. Weil es mit Spiel gegangen ist und alles gefällt mir
26	leicht ist.

5/HS Fragebogen

Nr	Wie gefallen?	Schwierigkeitsgrad	Mehr davon lernen?	Warum?
27	gut	sehr leicht	ja	Weil man viel in der Mathematik lernen kann
28	sehr gut	leicht	ja	Weil es schön ist und es Spaß macht
29	etwas	sehr leicht	nein	Weil mir das nicht so viel Spaß macht und lernen muß Spaß machen

5/G,2 38 S /34 Aww.

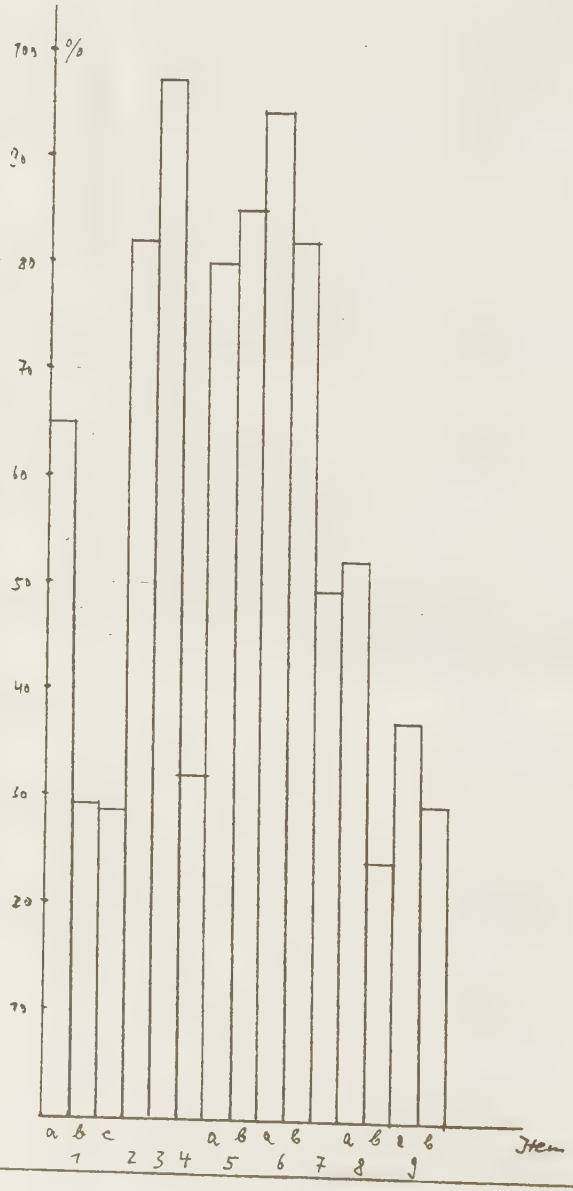
Nr	G	Math. Note	1 a	1 b	1 c	2	3	4	5 a	5 b	6 a	6 b	7	8 a	8 b	9 a	9 b	Σ	TO	(w, E)
	örtl. m		2	2	2	1	1	1	9	1	1	1	2	8	1	6	1	29 %		
1	m	3	1	1	1	1	1	-	9	1	1	-	1	8	-	-	-	25 64%	D	
2	m	3	2	2	2	1	1	-	9	1	1	1	1	8	-	6	1	36 92%	D	
3	m	3	2	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	8	1	6	-	26 67%	D	
4	m	3	1	-	1	1	1	1	9	1	1	1	1	-	-	-	-	78 41%	-	
5	m	3	2	-	-	1	1	-	9	1	1	1	1	8	1	6	1	33 85%	D	
6	m	3	2	-	-	1	1	1	7	-	1	1	2	-	-	-	-	76 41%	-	
7	m	4	2	2	2	1	1	-	9	1	1	1	-	8	-	-	1	29 74%	C	
8	m	4	-	-	-	-	1	1	9	1	1	1	1	-	-	-	-	75 38%	-	
9	m	3	-	-	-	1	1	-	9	1	1	1	1	-	-	-	-	75 38%	-	
10	m	1	2	2	2	-	1	-	9	1	1	1	2	8	-	6	1	36 92%	D	(Beste Mathem. -Schüler)
11	m	2	2	2	2	1	1	1	9	1	1	1	-	8	1	-	-	30 77%	B	
12	m	4	-	-	-	1	1	-	9	1	1	-	-	8	-	-	-	27 54%	C	
13	m	3	2	2	-	1	1	-	9	1	1	1	2	-	-	6	1	27 69%	D	
14	m	4	1	-	-	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	5 13%	C	fehlt öfters, Stunde
15	m	2	-	-	2	1	1	1	9	1	1	1	1	-	-	-	-	78 46%	B	
16	m	4	1	-	-	-	1	-	8	1	1	1	1	-	-	-	-	74 36%	-	
17	m	4	2	-	-	1	1	-	8	-	-	-	1	-	-	-	-	73 33%	D	
19	m	4	2	1	2	1	1	1	9	1	1	1	2	8	-	6	1	37 95%	D	18 krank
20	m	4	2	-	-	1	-	-	6	-	1	1	1	6	-	-	-	78 46%	D	
21	m	3	2	-	2	1	1	1	9	-	1	-	2	6	-	6	-	37 71%	D	
22	m	3	2	-	-	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	9 23%	-	
23	m	3	2	2	-	1	1	-	8	1	1	1	-	6	1	6	-	30 78%	D	
24	m	3	-	-	-	-	1	-	8	1	1	-	2	8	1	-	-	22 56%	-	

5/G, 2

Nr.	G	Math. Note	1 a	1 b	1 c	2	3	4	5 a	5 b	6 a	6 b	7	8 a	8 b	9 a	9 b	Σ	10
			2	2	2	1	1	1	9	1	1	1	2	8	1	6	1	39 %	
25	m	3	2	-	-	1	1	-	9	1	1	1	1	8	1	-	-	26 67%	D
26	m	4	2	2	1	1	1	-	9	1	-	1	1	8	-	-	-	27 69%	-
27	m	3	-	-	-	-	1	-	9	1	1	1	-	-	-	-	-	13 33%	D
28	m	3	2	-	-	1	1	-	9	1	1	1	2	-	-	6	1	25 64%	C
29	m	4	-	-	-	1	1	-	-	1	1	1	1	6	-	-	-	12 31%	D
31	m	3	2	1	1	1	1	1	9	1	1	1	-	8	1	6	1	35 90%	D
32	m	4	-	-	-	-	1	-	-	-	1	1	-	-	-	6	-	9 23%	C
34	m	3	2	2	1	1	1	1	9	1	1	1	2	6	1	-	1	30 77%	-
35	m	2	2	-	-	1	1	-	9	1	1	1	2	8	-	6	1	33 85%	D
36	m	4	-	-	-	1	1	-	1	1	1	1	1	-	-	-	-	7 18%	-
37	m	5	-	-	-	1	1	-	9	1	1	1	-	-	-	4	-	18 46%	C
		3,26	1,29 65	0,51 29	0,56 28	0,82 82	0,97 97	0,32 32	7,24 80	0,85 85	0,94 94	0,82 82	0,97 49	1,18 52	0,24 24	2,24 37	0,29 29	22 56%	

Frage 10				
A	B	C	D	ohne
-	2	6	16	10
	6%	18%	47%	29%

5/G, 2 Nachtest



6/G Test (7 w 25 m)

Nr.	G	Math. Note	1		2	3	4		5				6					
			a	b			a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	e	f
			3	1	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	m	3	-	3	-	1	3	4	-	3	-	1	-	1	-	1	1	-	1	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-
2 (G)	m	+2	-	3	-	1	4	3	-	3	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	-
3	m	+3	-	3	1	1	4	4	-	3	-	-	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-
4	w	5-	-	3	-	-	3	4	-	3	-	1	-	-	-	-	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	-
5	m	+3	-	3	1	1	3	4	-	3	-	-	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-
6	w	2	-	3	-	1	4	4	-	3	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	1
7	w	+3	-	3	-	1	4	4	-	3	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	1	-	1	-	1
8	w	4	-	3	1	1	4	4	-	3	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-
9 (G)	m	+5	-	3	-	1	1	4	-	3	-	-	-	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	m	4-	-	2	1	1	4	4	1	3	-	-	-	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	m	4-	-	2	1	1	4	3	-	3	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-
12	m	4-	-	3	-	1	4	4	-	3	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-
13	w	4	-	3	-	1	3	3	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-
14	m	5	-	3	-	1	4	4	1	3	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-
15	w	+3	-	3	1	1	4	4	2	3	-	1	-	-	-	-	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	-
16	m	3-	-	1	-	-	4	4	-	3	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	-
17	m	4	-	3	-	1	-	3	-	3	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-
18	m	3	-	3	1	1	4	4	3	3	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	m	4-	-		1		3		-		-		-		-		-		-		-		-		-		-	
20	m	+4	-		1		4		-		-		-		-		-		-		-		-		-		-	
21	m	2-	-	3	1	1	4	1	-	3	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-
22	m	4-	-	2	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	m	2-	-	1	-	-	3	3	-	3	-	-	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-
24	w	3	-	3	1	1	4	3	-	3	-	1	-	1	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-	-	-	-

6/G Test

Nr.	G	Math. Noten	1		2	3	4		5				6					
			a	b			a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	e	f
			3	7	4	3	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
25	m	2-	-2	7 7	4 3	-3	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	--
26	m	3	-3	7 7	-4	-3	-7	-7	-7	-7	-7	--	-7	-7	-7	-7	--	-7
27	m	3-	-2	7 7	4-	-3	--	-7	--	--	--	--	--	-7	-7	-7	-7	-7
28	m	+4	-	-	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
29	m	2	-3	7 7	4 4	-3	--	-7	7 7	7 7	7 7	-7	-7	-7	7 7	-7	-7	-7
30	m	2-	-3	7 7	4 4	-3	-7	-7	-7	-7	-7	--	-7	-7	-7	-7	-7	-7
31	m	+4	-2	7 7	4 7	-3	-7	-7	--	-7	-7	-7	--	-7	-7	--	-7	--
32	m	4-	-3	7 7	4 4	-3	-7	-7	-7	-7	-7	--	-7	-7	-7	-7	--	-7
		3,34	2,16 89%	0,86 85%	3,28 82%	2,9 97%	0,62 62%	0,72 72%	0,76 76%	0,85 85%	0,85 85%	0,53 53%	0,55 55%	0,66 66%	2,77 79%	1,55 55%	0,38 38%	0,24 24%

6/6 Test

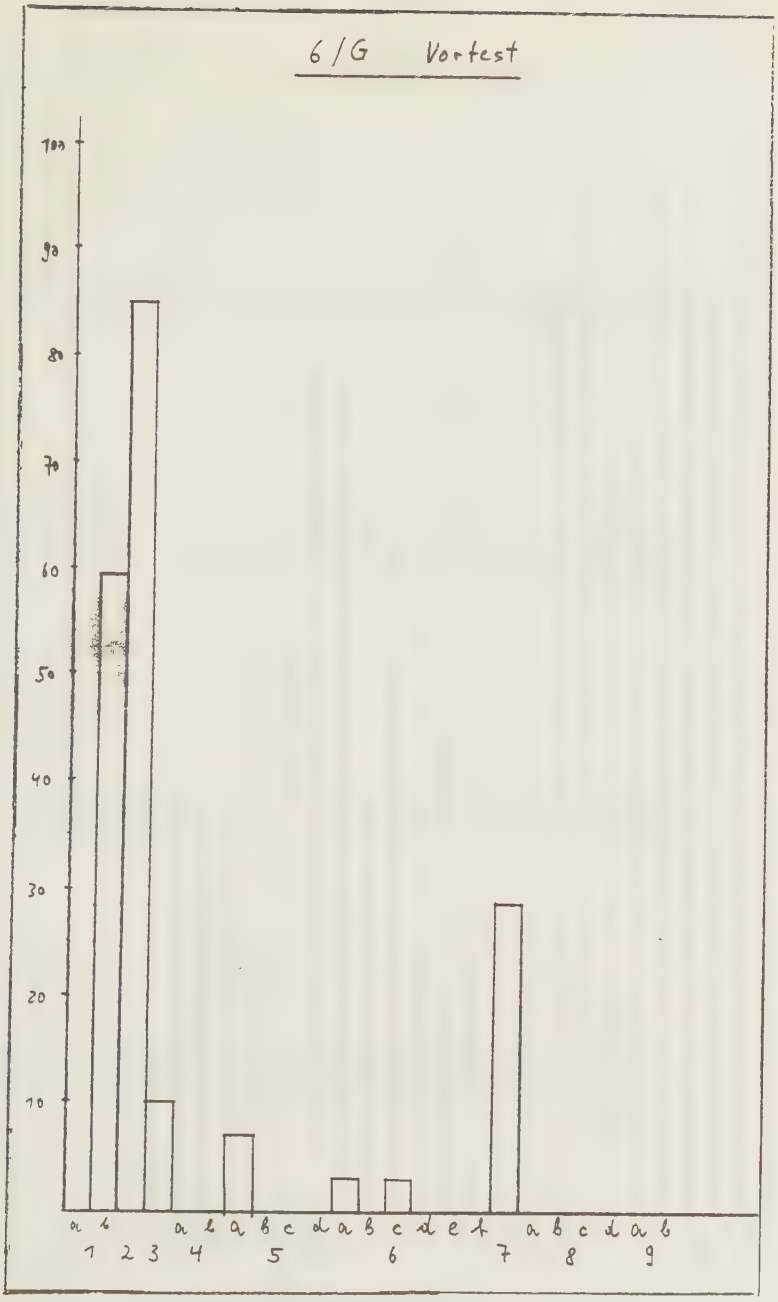
Nr	7	8				9		Σ	10		Zu-wachs
		a	b	c	d	a	b				
	1	11	3	3	2	1	10	54	A B	C D	
1	1 1	- 11	- 3	- 3	- -	- 1	- -	6 41 11% 75%	C	C	35 64%
2	- 1	- 11	- 3	- 3	- 2	- 1	- 10	4 49 7% 90%	C	D	45 83%
3	1 1	- 7	- -	- 3	- -	- 1	- 2	6 33 11% 61%	C	D	27 50%
4	1 1	- -	- 3	- 1	- -	- 1	- 2	4 25 7% 46%	C	C	21 39%
5	1 1	- -	- -	- -	- -	- -	- -	5 19 9% 35%	D	D	14 26%
6	1 1	- 11	- 3	- 3	- 2	- 1	- 7	5 50 9% 93%	C	C	45 84%
7	1 1	- 11	- 3	- 3	- 2	- -	- 7	5 47 9% 87%	C	C	42 78%
8	- 1	- 7	- -	- 3	- -	- -	- 1	5 30 9% 55%	D	D	25 46%
9	- 1	- 1	- -	- 2	- -	- -	- 1	1 20 2% 37%	C	C	19 35%
10	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	6 13 11% 24%	C	D	7 13%
11	- 1	- 1	- -	- 3	- -	- -	- -	5 20 9% 37%	C	D	15 28%
12	- 1	- 3	- 3	- 3	- 1	- -	- -	4 30 7% 55%	C	C	26 48%
13	- -	- 5	- -	- 1	- 2	- 1	- -	3 21 6% 38%	C	D	18 32%
14	- 1	- 2	- -	- -	- -	- -	- -	5 22 9% 41%	—	—	17 32%
15	1 1	- 11	- 3	- 1	- 2	- 1	- -	8 38 14% 70%	C	C	30 56%
16	- -	- 2	- -	- -	- -	- -	- -	4 16 7% 30%	C	C	12 23%
17	- -	- 1	- -	- -	- -	- 1	- -	1 12 2% 22%	C	-	11 20%
18	- 1	- -	- -	- -	- 2	- -	- -	8 20 14% 37%	—	C	12 23%
19	1	-	-	-	-	-	-	5 9%	C		/
20	1	-	-	-	-	-	-	6 11%	D		/
21	- 1	- 11	- 3	- 3	- 2	- 1	- 10	5 49 9% 91%	C	C	44 81%
22	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	3 6 6% 11%	B	B	3 5%
23	- 1	- 7	- 3	- 1	- -	- -	- -	3 29 6% 53%	C	C	26 47%
24	- 1	- 7	- -	- -	- -	- 1	- 2	5 30 9% 55%	D	C	25 46%

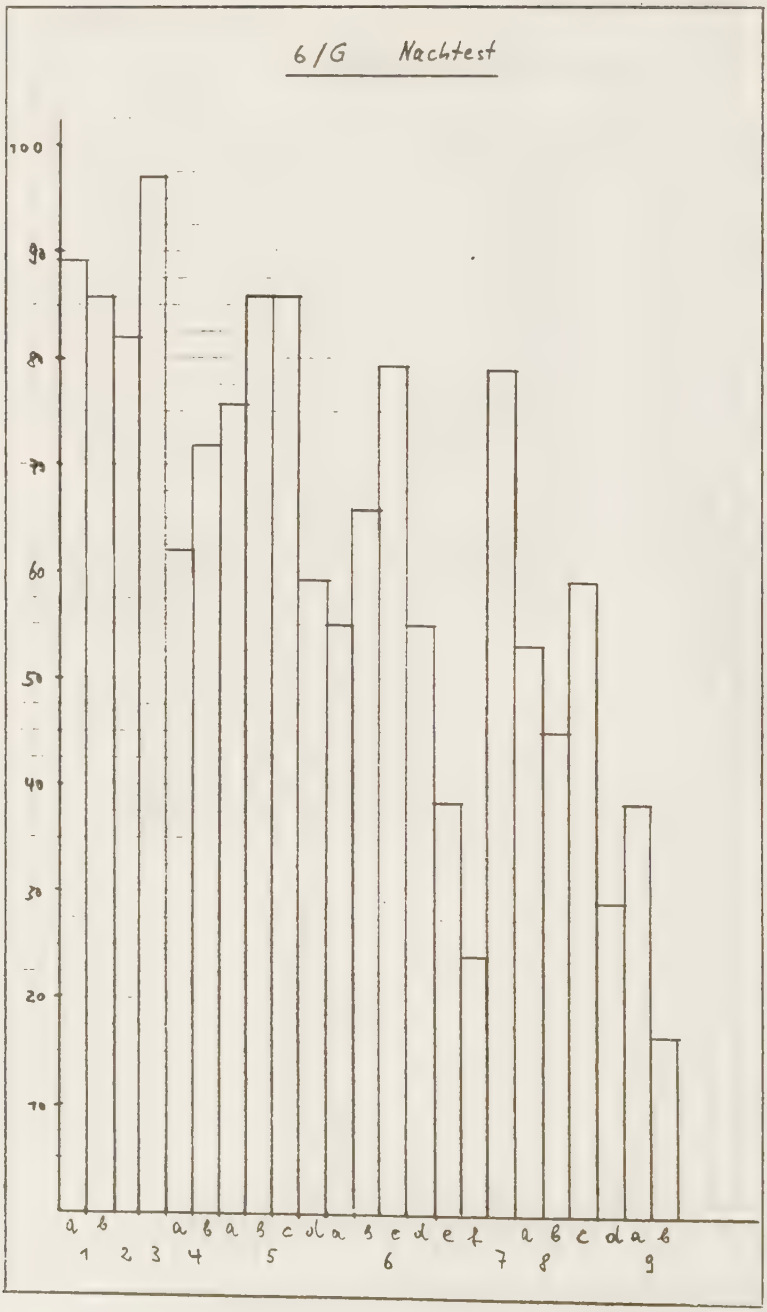
6 / G Test

Nr.	7	8 a	8 b	8 c	8 d	9 a	9 b	Σ	10	Zuwachs
	7	11	3	3	2	7	10	54	A B C D	
25	- 1	- 11	- -	- 3	- -	- -	- -	5 35 9% 64%	C C	30 55%
26	- 1	- 11	- 2	- 3	- -	- -	- -	7 38 2% 70%	C C	37 68%
27	1 1	- 7	- 2	- 3	- -	- -	- 1	6 26 11% 48%	C C	20 39%
28	-	-	-	-	-	-	-	6 11% ?	C -	?
29	- 1	- 11	- 3	- 3	- -	- -	- 2	9 42 16% 78%	C C	33 62%
30	-	- 11	- 3	- 3	- 2	- 1	- 3	5 45 9% 83%	C C	40 74%
31	- 1	- 3	- -	- 3	- -	- -	- 1	5 23 9% 43%	C C	18 34%
32	- 1	- 7	- 2	- -	- -	- -	- -	5 37 9% 57%	C C	26 48%
Durchschnitt	0,79 79%	5,86 53%	1,34 45%	1,75 59%	0,59 29%	0,38 38%	1,59 17%	5 30 9% 55%		25 46%

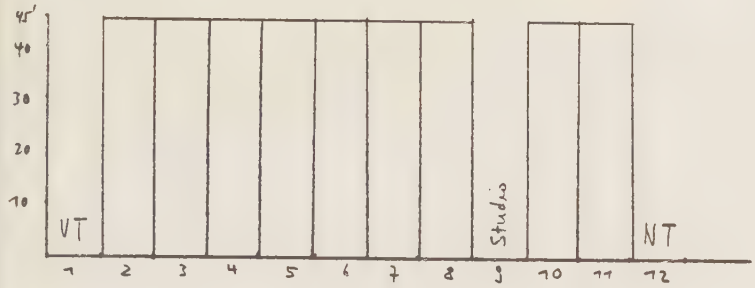
Frage 10.

A	B	C	D	
-	1 4%	23 85%	3 11%	Vortest
-	7 11%	19 70%	7 26%	Nachtest

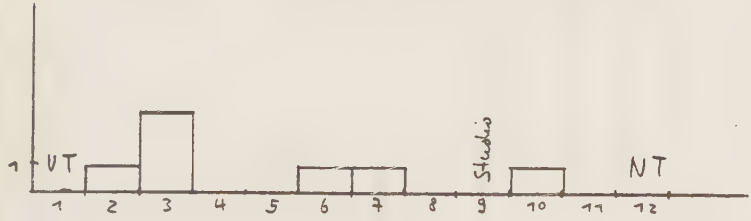

6/G Vortest
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
a b a b c d a b c d e f a b c d a b
1 2 3 4 5 6 7 8 9


6/G Nachtest
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
a b a b a b a b c d a b e d e f a b c d a b
1 2 3 4 5 6 7 8 9

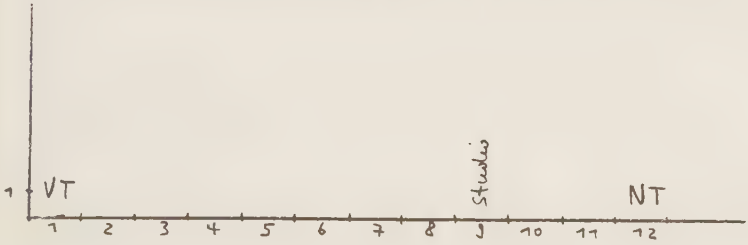
6/G (+) m (Note +2 Nr. 2



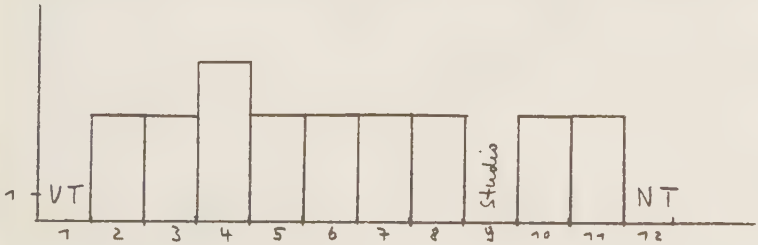
(1)



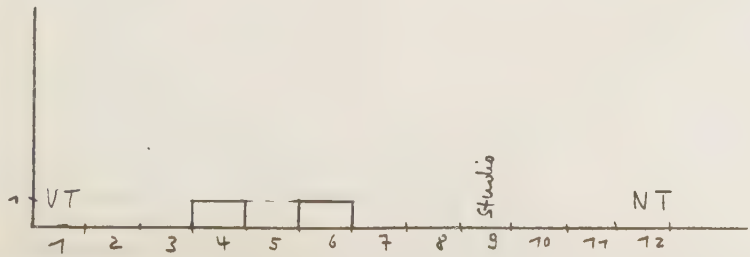
(3)



(4)

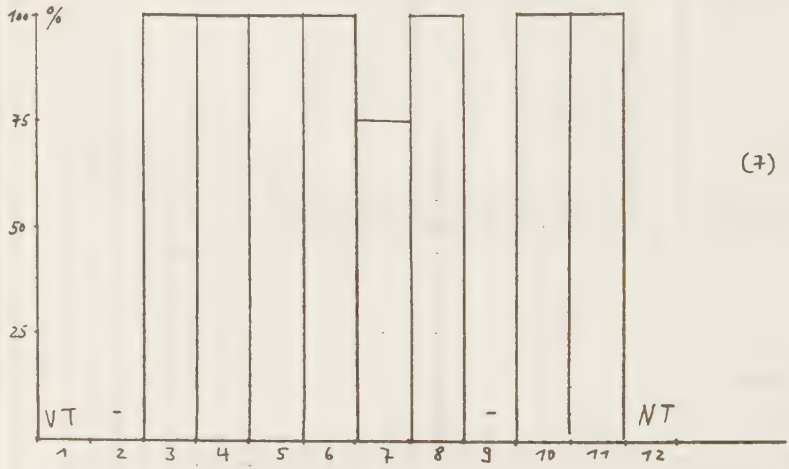


(5)



(6)

6/G (+)

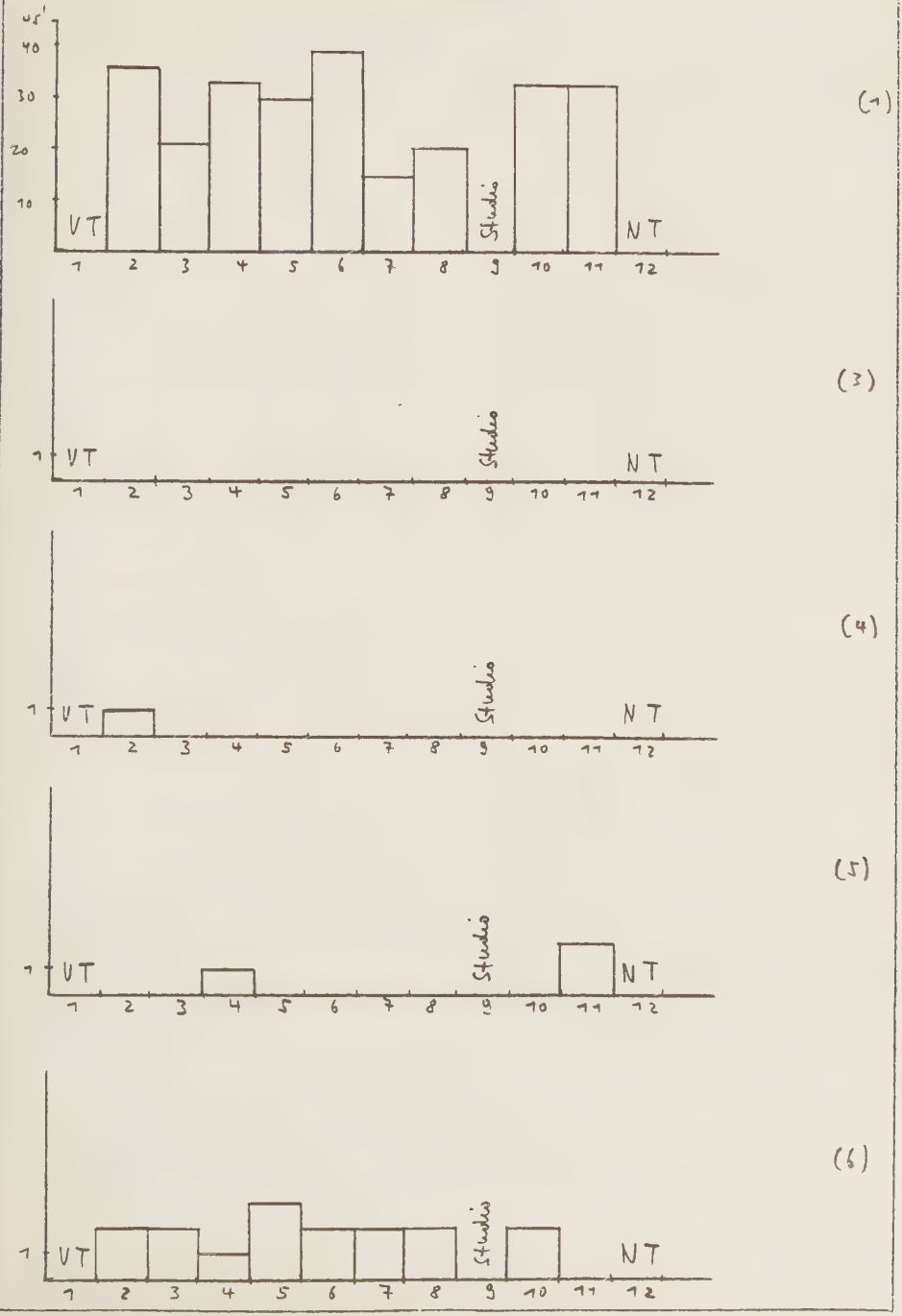


(7)

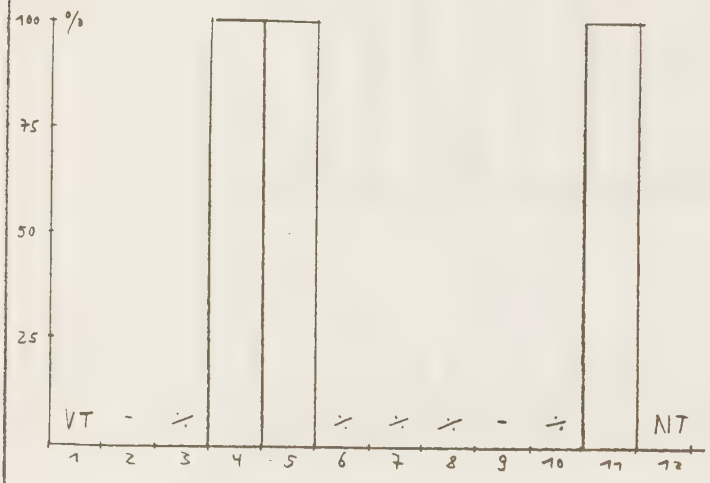
- keine Hausaufgabe
= nicht gemacht

Fragebogen: sehr gut, sehr leicht, ja
"Weil mich alles
interessiert."

6 / G (-) m (Note 5) Nr. 9



6/G (-)



(7)

– keine Hausaufgabe

÷ nicht gemacht

Fragebogen: mittel, leicht, ja:
"Weils ein bißerl Spaß gemacht hat."

6./G Fragebogen

Nr.	Wie gefallen:	Schwierigkeitsgrad:	Mehr lernen	Warum:
1	sehr gut	mittel	ja	Weil, wenn in weiteren Jahren im Leben von einem was verlangt wird, daß man dann
2	sehr gut	sehr leicht	ja	Weil mich das interessiert
3	mittel	sehr leicht	ja	Es ist sehr leicht
4	gut	mittel	ja	Weil es mir Spaß macht. Dieser Stoff ist leichter und besser als die normale Mathe.
5	mittel	mittel	ja	Weil man es [illegible] braucht. Weil es [illegible] ist (für mich auf jeden Fall)!
6	mittel	sehr leicht	nein	Für was braucht man das später? Ich brauche es später doch nicht
7	mittel	sehr leicht	nein	Weil ich nicht weiß, wozu das gut sein soll. Das brauche ich später sowieso nicht
8	etwas	mittel	ja	Weil es leichter ist als Mathematik
9	mittel	leicht	ja	Weil's ein bißchen Spaß gemacht hat
10	mittel	mittel	ja	Weil wir keine Exen schreiben
11	gut	leicht	ja	Weil es nicht so schwer ist wie das andere
12	gut	leicht	ja	Weil es mir gefällt
13	mittel	mittel	ja	Weil es ein bißchen interessant ist
14	gar nicht	schwer	ja	Immer noch besser als Mathematik bei Herrn P. Das ist echt besser; [illegible]
15	gut	mittel	ja	Weil ich gerne etwas mehr wissen möchte Weil es interessant ist
16	gut	leicht	ja	Weil es mir gefällt
17	mittel	mittel	ja	Weil es was Neues ist
18	gut	mittel	ja	Weil man, wenn man sich auf diesem Gebiet auskennt, später gute Möglichkeiten [illegible]
19	mittel	mittel	nein	Weil ich finde man sollte auch andere Sachen machen in der Mathematik
20				
21	sehr gut	sehr leicht	ja	–
22	gar nicht	sehr schwer	nein	Weil ich das an [illegible] find

6/G Fragebogen

Nr.	Warum (Forts.)
7	nicht berechtigt ist. Und anpassen ist es interessant.
14	unterhalten usw.
18	hat, es auszuwerten. z.B.: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß ich im Abitur Notendurchschnitt von 1,8 bekomme, usw.

6/G Fragebogen

Nr.	Wie gefallen:	Schwierigkeitsgrad:	Mehr davon lernen:	Warum
23	mittel	leicht	ja	–
24	etwas	mittel	ja	Weil es [illegible] ist als Mathematik
25	mittel	mittel	ja	Weil man sich im Unterricht so gut entspannen kann
26	gut	mittel	nein	Andere Mathematik interessiert mich viel mehr
27	mittel	schwer	nein	Weil es noch zu schwer ist für mein Alter
28	gut	mittel	ja	Darum!
29	gut	leicht	ja	Schwer zu sagen
30	sehr gut	sehr leicht	ja	Weil es mir gefällt und man es genauso wie Mathematik gebrauchen können
31	mittel	mittel	nein	Wozu?
32	gut	mittel	ja	Ein paar Stunden, wenn man nicht wieder 100-mal würfeln oder Reißnägel werfen muß

6/HS Test 29 (16 m, 13 w)

No.	G (m/w)	Math Note	1 a (3)	1 b (1)	2 (4)	3 (3)	4 a (1)	4 b (1)	5 a (1)	5 b (1)	5 c (1)	5 d (1)	6 a (1)	6 b (1)	6 c (1)	6 d (1)	6 e (1)	6 f (1)
1	m	4	- 3	- 1	1 -	- 3	- -	- -	- 1	- 1	- -	- -	- 1	- -	- -	- -	- -	- -
2	m	3	- 3	- 1	2 4	- 3	- 1	- 1	- 1	- -	- -	- -	- -	- -	- 1	- -	- -	- -
3	m	4	- 3	- 1	- 4	- -	- -	- 1	- 1	- 1	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
4	m	1	- 3	1 1	- 4	- 3	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1
5	m	2	- 3	1 1	- 4	- 3	- 1	- -	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- -	- -	- -
$6_{(+)}$	m	1	- 3	- 1	3 3	- 3	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- -	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- -
7	m	5	- -	- 1	- 3	- -	- 1	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
8	m	5	- 2	- 1	1 4	- 3	- 1	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
9	m	3	- 3	- 1	3 2	- 3	- -	- -	- 1	- 1	- 1	- -	- 1	- 1	- 1	- -	- -	- -
10	m	4	- -	- -	- -	1 -	- 1	1 -	- -	- 1	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
11	m	2	- -	- 1	3 4	- 3	- -	- 1	- 1	- 1	- 1	- -	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1
12	m	4	- 2	- -	- 3	- 3	- 1	- -	- -	- -	- 1	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
13	m	3	- 3	1 1	3 4	- 3	- -	- -	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- -	- -	- -	- -	- -
14	m	5	- 3	- 1	- 4	- 3	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
15	m	4	- 3	- 1	- 3	- -	- -	- -	- 1	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
16	w	2	- 3	1 1	- 4	- 3	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1
17	w	3	- 3	- 1	1 4	- 3	- -	- -	- 1	- 1	- 1	- 1	- -	- -	- -	- -	- -	- -
18	w	2	- 3	- 1	3 4	- 3	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- -	- 1	- 1	- 1	- 1	- -	- -
19	w	3	- 3	- 1	1 3	- 3	- -	- -	- -	- 1	- -	- 1	- -	- -	- -	- -	- -	- -
20	w	4	- 3	- -	1 3	- 3	- 1	- 1	- -	- -	- -	- -	- 1	- 1	- 1	- -	- -	- -

6 / HS Test

Nr.	G	Matk.	1		2	3	4		5				6					
	m	Note	a	b			a	b	a	b	c	d	a	b	c	d	e	f
	w		2	1	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	w	3	-3	-1	1 4	-3	--	--	-1	--	-1	--	-1	-1	-1	--	--	--
22	w	3	-3	-1	-4	-3	--	--	--	--	--	--	-1	-1	-1	-1	--	--
23	w	2	-3	1 1	-4	-3	-1	-1	-1	-1	-1	--	-1	-1	-1	-1	-1	-1
24	w	3	-3	-1	-4	-3	--	--	--	--	--	--	-1	-1	-1	-1	--	--
25	w	3	-3	-1	2 4	-3	-1	-1	-1	-1	-1	--	-1	--	-1	-1	-1	-1
26 (-)	w	5	-3	-1	-3	-3	--	--	-1	-1	-1	--	--	--	--	--	--	--
27	w	4	-3	-1	-4	-3	--	-1	--	--	--	--	--	--	-1	--	--	--
28	w	5	-3	-1	-4	--	--	--	--	--	--	--	-1	-1	-1	-1	--	--
29	m	3	-3	-1	-4	-3	--	--	--	-1	--	--	--	--	--	--	--	--
		3,28	2,62 87%	0,90 30%	3,41 85%	2,48 83%	0,45 45%	0,38 38%	0,59 59%	0,59 59%	0,48 48%	0,27 27%	0,55 55%	0,45 45%	0,55 55%	0,34 34%	0,27 27%	0,77 77%

6/HS Test

Nr.	7	8				9		Σ		10		Zuwachs	
		a	b	c	d	a	b	54		A B C D		Punkte	%
	1	11	3	3	2	1	10		%				
1	-	-	-	-	-	-	-	1 2%	70 79%	C	D	9	17%
2	-	1	- 2	-	- 3	- 2	- 1	- 7	2 4%	37 57%	C	C	29	53%
3	-	1	-	-	-	-	- 1	-	0 0	73 24%	-	D	73	24%
4	-	1	- 11	- 3	- 2	- 2	- 1	- 6	1 2%	49 90%	D	C	48	88%
5	-	1	- 11	-	- 2	-	- 1	- 2	1 2%	35 65%	-	C	34	63%
6	-	1	- 11	- 3	- 3	-	- 1	- 10	3 6%	49 91%	C	C	46	84%
7	-	-	- 3	-	-	-	-	-	0 0	8 75%	C	C	8	15%
8	-	1	- 1	-	-	-	- 1	-	1 2%	74 26%	C	D	73	24%
9	-	1	- 11	- 3	- 3	-	- 1	- 7	3 6%	41 76%	C	C	38	70%
10	-	1	- 3	-	-	-	- 1	- 2	3 6%	9 17%	C	C	6	11%
11	-	1	- 11	- 3	- 3	- 2	- 1	- 10	3 6%	49 90%	C	C	46	84%
12	-	1	-	-	-	-	-	- 1	- -	0 0	12 22%	D	D	12	22%
13	-	1	-	-	-	-	-	-	- -	4 7%	17 31%	-	C	13	24%
14	-	1	-	-	-	-	- 2	-	- -	0 0	14 26%	C	D	14	26%
15	-	-	-	-	-	-	-	-	- 1	0 0	9 17%	C	D	9	17%
16	-	1	- 11	- 3	- 3	- 2	- 1	- 6	1 2%	50 93%	C	C	49	90%
17	-	1	- 11	-	- 3	-	-	-	- -	1 2%	30 56%	C	D	29	54%
18	-	1	- 1	- 1	- 2	-	-	1	- -	3 6%	26 48%	C	C	23	42%
19	-	-	- 7	-	-	-	-	-	- -	1 2%	19 35%	C	C	18	33%
20	-	1	- 1	-	-	-	-	1	- -	1 2%	17 31%	C	C	16	29%

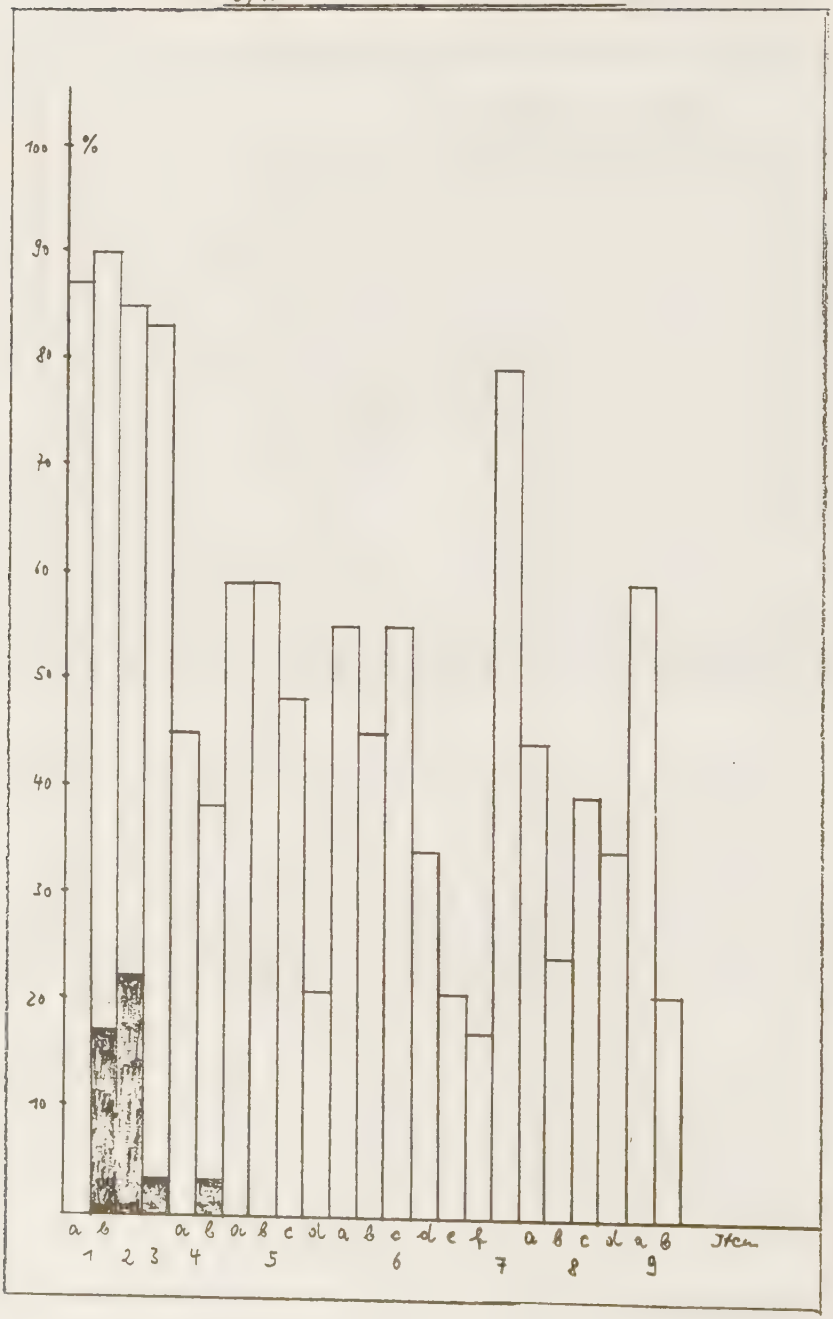
6 / HS Test

Vp.	7	8				9		Σ		10		Bemerk.
		a	b	c	d	a	b					
	1	11	3	3	2	1	10					
21	- 1	- 11	- 2	- 3	- 2	- -	- -	1 2%	35 65%	C	C	34 33%
22	- 1	- 1	- -	- 1	- 2	- 1	- -	0 0	27 39%	D	C	27 39%
23	- 1	- 7	- -	- -	- -	- 1	- 3	1 2%	34 13%	C	C	33 61%
24	- 1	- 1	- -	- 2	- -	- 1	- 2	0 0	27 39%	C	D	27 39%
25	- 1	- 6	- 1	- 1	- 2	- -	- -	2 4%	32 51%	-	C	30 55%
26	- -	- 11	- 2	- 2	- -	- -	- -	0 0	28 32%	C	C	28 52%
27	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	0 0	73 24%	D	C	73 24%
28	- 1	- 1	- -	- -	- 2	- 1	- 4	0 0	27 39%	C	B	27 39%
29	- 1	- 7	- -	- 1	- 2	- -	- -	0 0	23 43%	C	C	23 43%
Durchschnitt	0,79 79%	4,83 44%	0,72 24%	1,17 39%	0,69 34%	0,59 59%	2,07 27%	1 2%	25 46%			24 44%

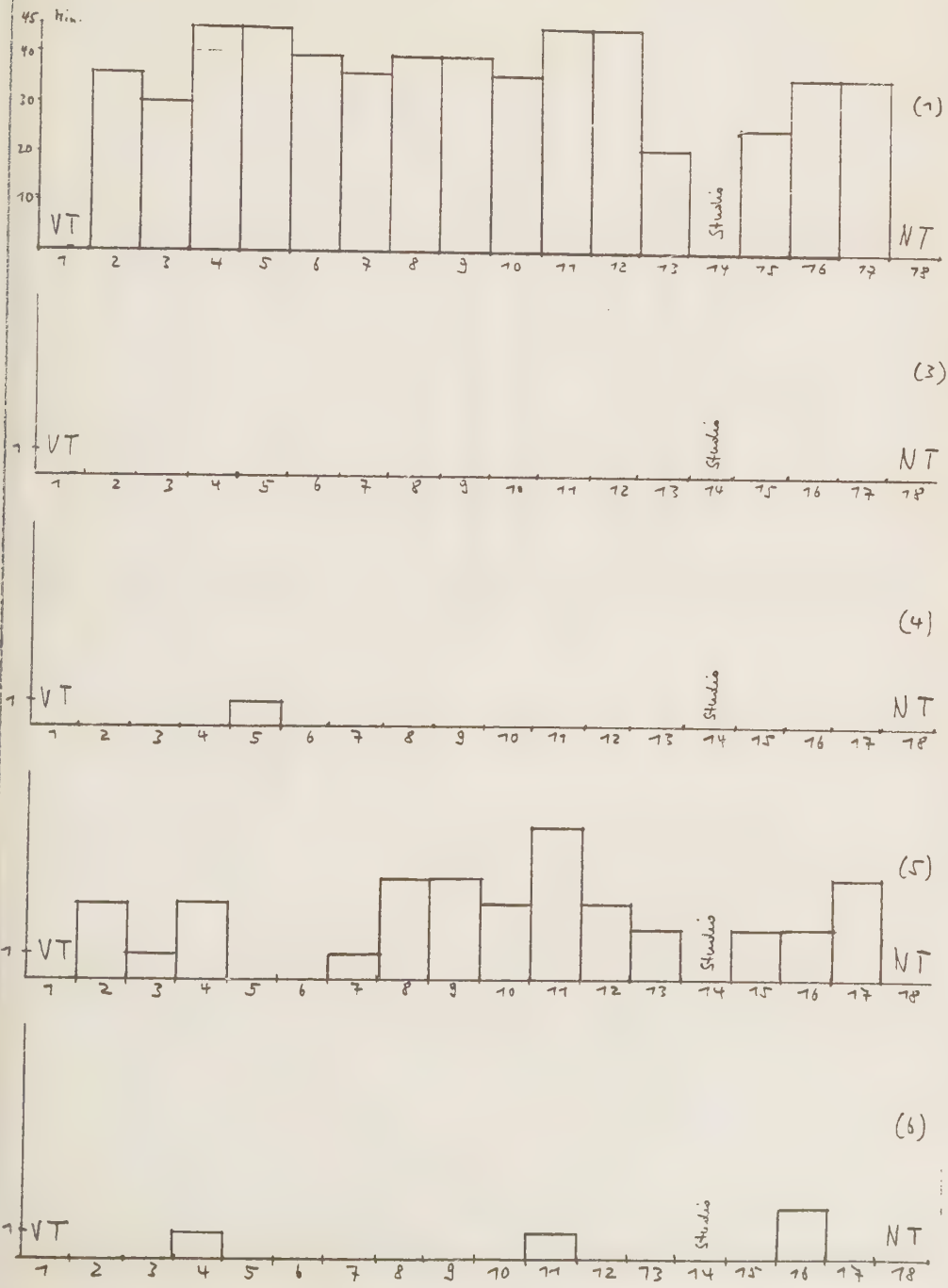
Frage 10

A	B	C	D	ohne	
-	-	21 72%	4 14%	4 14%	Vortest
-	1 3%	20 69%	8 28%	- -	Nachtest

6/HS Vor- und Nachtest

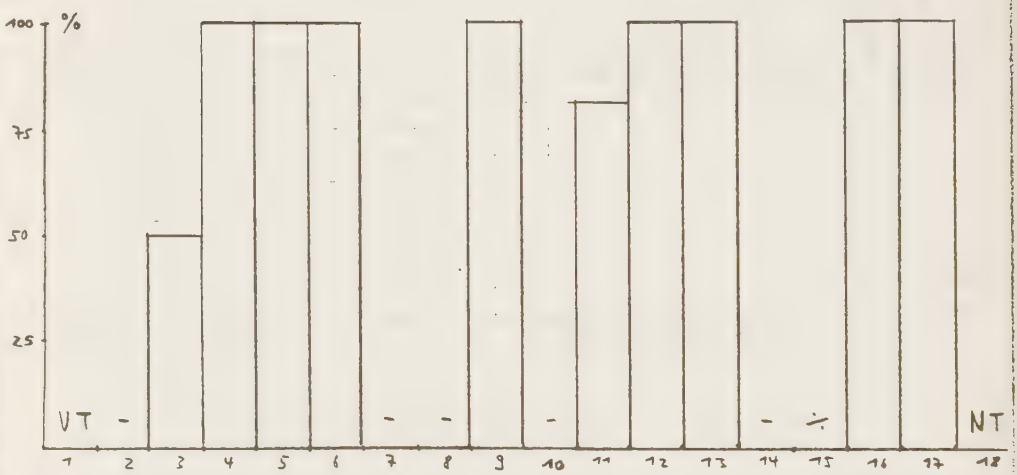


6/HS (+) m (Note 1) Nr. 6



6/HS (+)

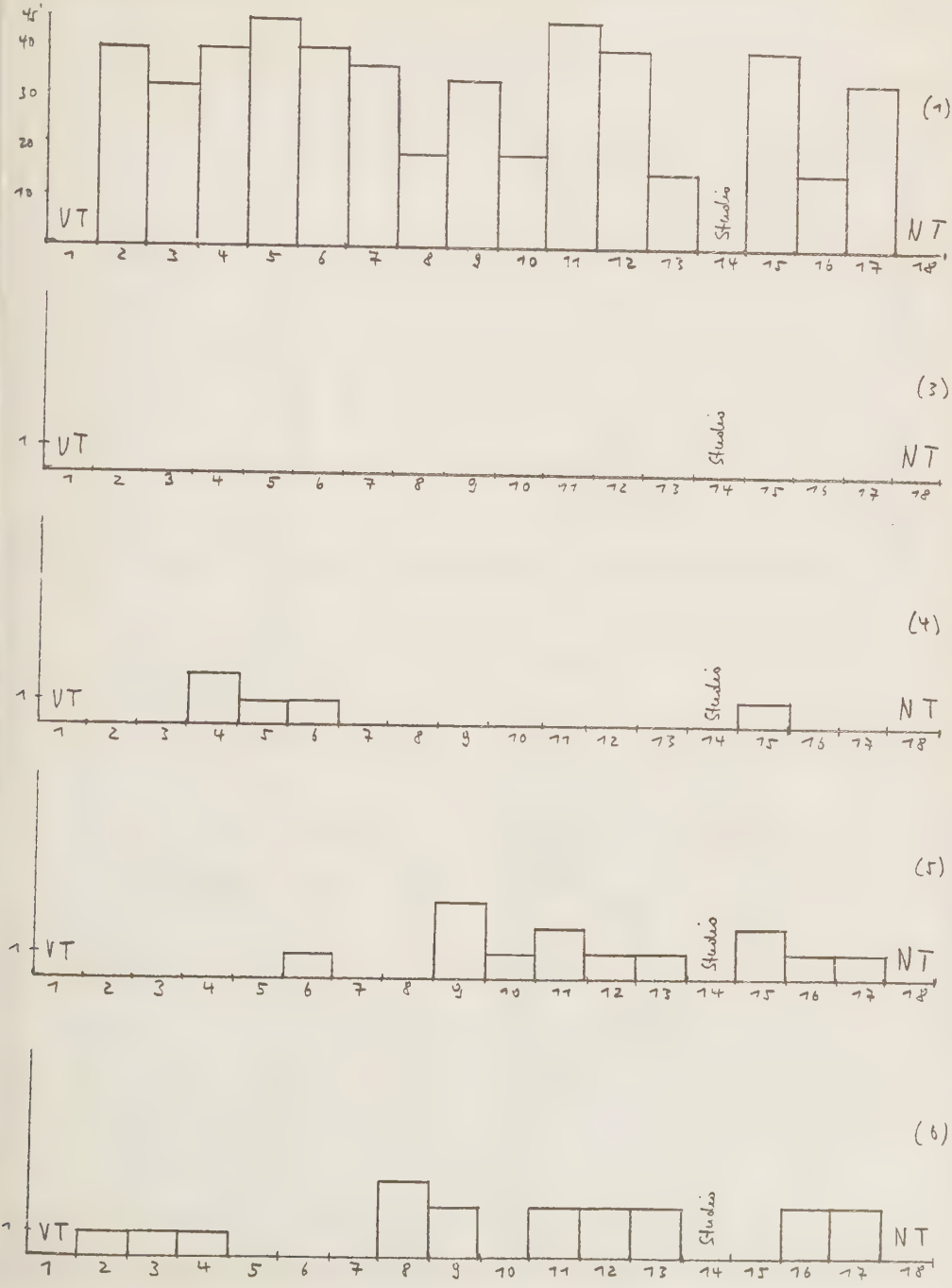
(7)



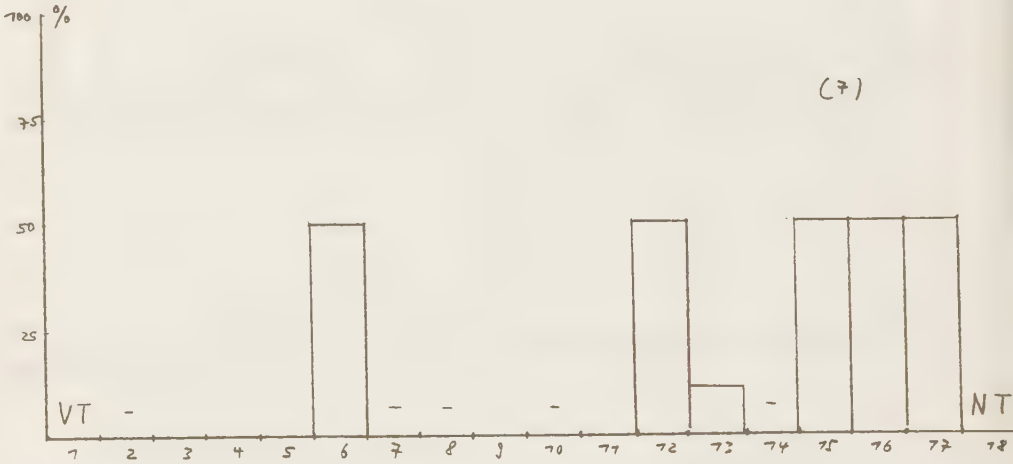
– keine Hausaufgabe
½ nicht gemacht

Fragebogen: etwas, leicht, weil:
"Ich bin daran nicht interessiert."

s | HS (-) w (Note 5/6) Nr. 26



6/HS (-)



- Keine Hausaufgabe

÷ nicht gewertet

Fragebogen: gar nicht, mittel, sehr:
"Weil es mir nicht gefällt."

6/H5 Fragebogen

Nr.	Wie gefallen	Schwierigkeitsgrad:	Mehr davon lernen:	Warum
1	mittel	mittel	nein	Weil man das im späteren Berufsleben nicht brauchen kann
2	gut	mittel	ja	Weil ich es gut finde, und man [illegible] in Mathe zu brauchen
3	gut	leicht	nein	Weil ich finde, daß das in Mathematik nicht notwendig ist
4	etwas	mittel	nein	Es ist irgendwie nicht gut, so komisch, ungewohnt!
5	etwas	mittel	nein	Weil es zwar leicht ist, wenn man es begriffen hat, aber bis man!
6(+)	etwas	leicht	nein	Ich bin daran nicht interessiert
7	mittel	mittel	nein	Ich bin daran nicht interessiert
8	etwas	schwer	nein	Es ist sehr langweilig und kompliziert. Mir hat es nicht sehr >
9	gar nicht	mittel	nein	Mich interessieren die Rechnungen nicht
10	mittel	leicht	nein	Weil ich das für unnötig halte
11	gut	mittel	ja	Weil es etwas Schönes ist.
12	etwas	schwer	nein	Es ist sehr langweilig und kompliziert. Mir gefällt es nicht
13	gut	mittel	ja	
14	gar nicht	mittel	nein	Weil so blöde Aufgaben waren, die man nie im Leben braucht
15	gut	mittel	nein	Weil ich es einfach komisch finde
16	etwas	mittel	nein	Weil ich das in meinem Beruf nicht brauchen kann und nicht so viel >
17	gar nicht	mittel	nein	Weil es langweilig ist und mir keinen Spaß macht
18	mittel	mittel	nein	Es ist langweilig und normale Mathe gefällt mir besser
19	(recht) gut	mittel	ja	Weil man dann im Mathe-Unterricht besser mitkommt, weil so ziemlich >
20	etwas	leicht	nein	Weil es eigentlich im großen und ganzen langweilig ist. Für was es gut sein soll?
21	etwas	mittel	nein	Weil es mir überhaupt keinen Spaß macht und weil es für mich über >
22	gar nicht	mittel	nein	Weil es mir nicht gefällt.
23	mittel	mittel	nein	Es ist zum Teil sehr langweilig
24	etwas	schwer	nein	Weil man mit den Fachausdrücken ganz durcheinanderkommt, weil >

6/45 Fragebogen

Nr.	Warum ? (Forts.)
8	gefallen.
16	Mathe haben will und weil es manchmal ganz schön verzwickt ist.
19	das gleiche dran kommt.
21	haupt nicht wichtig ist.
24	selective Häufigkeit und so was.

6/HS Fragebogen

Nr.	Wie gefallen:	Schwierigkeitsgrad:	Weiter lernen:	Warum:
25	etwas	schwer	nein	Weil es keinen Spaß macht und ich es später nicht brauche
26(-)	gar nicht	mittel	nein	Weil es mir nicht gefällt
27	gut	mittel	nein	Man braucht es ja für später nicht notwendig.
28	etwas	schwer	nein	Nein, weil man so durcheinander kommt.
29	gut	mittel	nein	Weil es mir nicht gefällt

6/G, 2 Nachtest

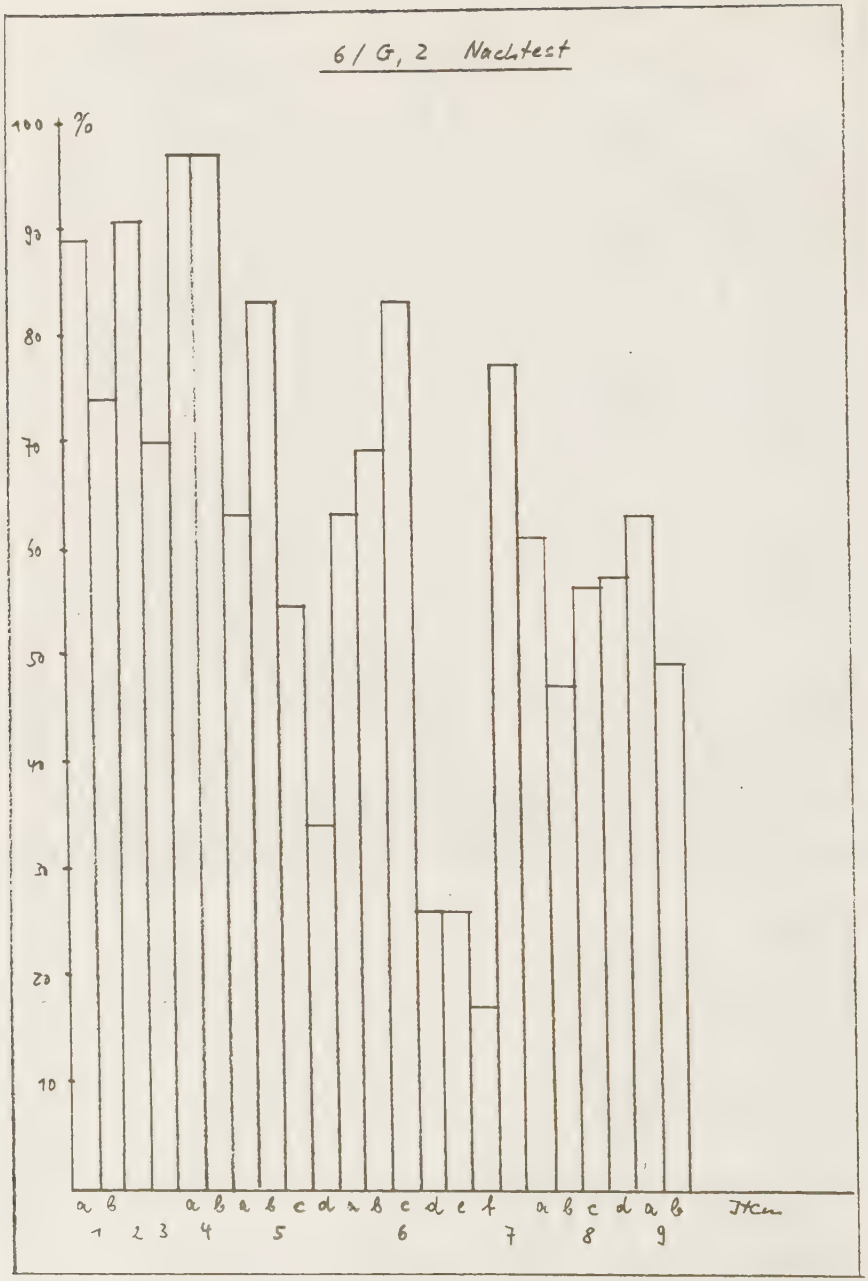
Nr	G ohne Namen	Nat. Verh	1 a	1 b	2	3	4 a	4 b	5 a	5 b	5 c	5 d	6 a	6 b	6 c	6 d	6 e	6 f	7	8 a	8 b	8 c	8 d	9 a	9 b	Σ	10
			3	1	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	3	3	2	1	10	54 %	
1	m		2	1	4	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	1	-	1	11	3	3	2	-	-	40 74%	-
2	m		3	1	4	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	1	-	7	-	3	2	1	4	35 65%	D
3	m		3	1	4	3	1	1	1	1	1	-	1	1	1	-	-	1	1	11	3	3	2	1	10	51 94%	C
4	m		3	1	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	1	11	3	1	2	1	10	49 91%	C
5	m		3	-	4	3	1	1	1	1	1	1	-	1	-	-	-	-	1	11	3	3	-	1	10	46 85%	C
6	m		3	1	4	-	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	-	1	11	3	3	-	1	10	46 85%	D
7	m		2	1	4	-	1	1	-	1	-	-	1	1	1	-	-	-	1	7	-	-	-	1	2	24 44%	C
8	m		3	1	4	1	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	-	1	1	11	3	3	2	1	10	50 93%	D
9	m		3	1	4	3	1	1	-	-	1	1	-	-	1	-	-	-	-	7	-	-	-	-	-	23 43%	D
10	m		3	1	4	3	1	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	-	-	7	-	3	2	1	10	44 81%	D
11	m		3	-	4	-	1	1	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	11	3	3	2	-	-	29 54%	B
12	m		3	1	3	3	-	-	-	1	-	1	1	1	1	1	1	-	1	7	-	-	-	1	10	36 67%	D
13	m		3	1	4	-	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	3	2	-	-	18 33%	D
14	m		3	1	4	3	1	1	-	1	-	-	1	1	1	-	-	-	1	-	3	3	2	1	10	37 69%	D
15	m		3	1	4	-	1	1	-	1	1	-	1	-	1	-	1	-	1	3	-	-	-	-	-	19 35%	C
16	m		2	1	4	3	1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	7	-	3	-	1	10	35 65%	D
17	m		-	-	3	3	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	1	7	-	1	2	1	10	33 61%	D
18	m		3	-	3	3	1	1	-	1	1	1	-	-	1	-	-	-	1	6	2	-	2	-	-	26 48%	D
19	m		2	-	3	3	1	1	1	1	1	1	-	1	1	1	-	1	1	11	3	3	2	1	2	41 76%	D
20	m		3	-	4	-	1	1	1	1	1	1	-	-	1	1	-	-	-	1	11	3	3	2	1	10	45 83%	D
21	m		2	-	4	3	1	1	1	1	1	1	-	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	18 33%	D
22	m		-	1	2	3	1	1	1	1	1	-	-	-	1	1	-	1	-	1	11	3	3	2	1	10	44 81%	D

6/G.2 Nachtest

Nr.	G	Maß Voie	1 a	1 b	2	3	4 a	4 b	5 a	5 b	5 c	5 d	6 a	6 b	6 c	6 d	6 e	6 f	7	8 a	8 b	8 c	8 d	9 a	9 b	Σ	10
			3	7	4	3	7	7	7	7	7	7	-	-	-	-	-	-	-	7	3	3	2	7	10	54 %	
23	m		3	7	4	3	7	7	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	-	-	-	7	-	22 47%	D
24	m		3	7	4	-	7	7	7	7	-	-	7	-	7	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	15 28%	D
25	m		3	7	4	3	7	7	7	7	7	-	7	7	7	-	-	-	7	7	-	3	2	7	8	41 76%	C
26	m		3	7	4	3	7	7	-	7	7	7	7	7	7	7	-	-	-	11	3	7	2	7	2	40 74%	D
27	m		3	7	1	3	7	7	7	7	7	-	7	7	-	-	-	-	7	10	3	3	-	7	10	43 80%	D
28	m		3	7	4	7	7	7	7	7	-	7	7	7	7	7	-	-	7	11	3	7	2	7	10	47 87%	C
29	m		3	7	4	-	7	7	-	-	7	-	7	-	7	-	7	-	7	-	-	-	-	-	-	15 28%	D
30	m		3	7	3	3	7	7	7	7	-	7	-	7	7	7	7	7	7	11	3	3	2	7	10	57 94%	D
31	m		3	-	3	3	7	7	-	7	7	-	7	7	7	-	-	-	7	-	-	7	2	-	-	20 37%	C
32	m		3	-	4	3	7	7	-	7	-	-	7	7	7	7	-	7	7	7	2	7	2	-	-	25 46%	C
33	m		3	7	4	3	7	7	7	-	-	7	-	7	7	-	-	-	7	7	-	-	-	-	-	25 46%	A
34	m		2	7	4	3	7	7	7	7	7	-	-	-	7	-	-	-	7	7	-	7	-	-	-	19 35%	C
35	m		3	7	4	3	7	7	-	-	-	-	7	7	7	-	-	-	-	7	-	-	-	7	2	20 37%	B
Du:		3,33	2,66 89	0,77 74	3,62 91	2,77 70	0,97 97	0,97 97	0,65 63	0,83 83	0,57 57	0,34 34	0,63 63	0,69 69	0,83 83	0,26 26	0,26 26	0,77 77	0,77 77	6,77 67	7,14 47	7,14 56	7,71 57	0,63 63	4,86 49	33 67 %	

Folge 10

A	B	C	D	ohne	
1	2	10	21	1	
3	6	28,5	30	3	%


6 / G, 2 Nachtest
%
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
a b a b a b c d a b c d e f a b c d a b
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Jtkm

Lebenslauf

Geburt	5.9.1934 in Jibka, CSR, Kreis Braunau Vater: Richard Werner, Lehrer Mutter: Hedwig Werner, geb. Meier
Schulbesuch	1940-1944 Grundschule in Jibka 1944-1945 Gymnasium in Braunau 1945-1953 Gymnasium-neusprachlicher Zweig 1953 Abitur - Luisengymnasium München
Studium	1953-1956 Studium der Philosophie und Neuphilologie (Englisch, Französisch) an der Universität München
Verheiratung	1957 1959, 1962, 1964 Geburt der Kinder Peter, Brigitte und Thomas
Studium	1970 Studium des Lehramts an Grund- und Hauptschulen (unter Anrechnung von zwei Semestern) an der Universität München 1972 Erste Lehramtsprüfung
Schuldienst	1972-1976 1975 Zweite Lehramtsprüfung
Ernennung zur wissenschaftlichen Assistentin	1976 am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Fakultät für Mathematik an der Universität München
Studium	1976-1981 Studium der Pädagogik und der Mathematik